انتگرال مختلط

mapping

نگاشت

تابع پیوسته و حقیقی $f(x) = y$ را می‌توان به آسانی در صفحهٔ مختصات کارتزین $y - x$ رسم کرد و نمودار آن را به‌دست آورد. اما در مورد تابع مختلط:

$$w = f(z) = u(x,y) + iv\,(x,y)\ ;\ z = x + iy$$

موضوع کمی پیچیده‌تر است. زیرا برای نمایش این تابع، به طریق کارتزین، به چهار محور مختصات نیاز داریم؛ دو محور برای متغیرهای مستقل x و y و دو محور برای متغیرهای وابستهٔ u و v

(الف) نگاشت به‌وسیلهٔ تابع همانی[1] $w = f(z) = z$

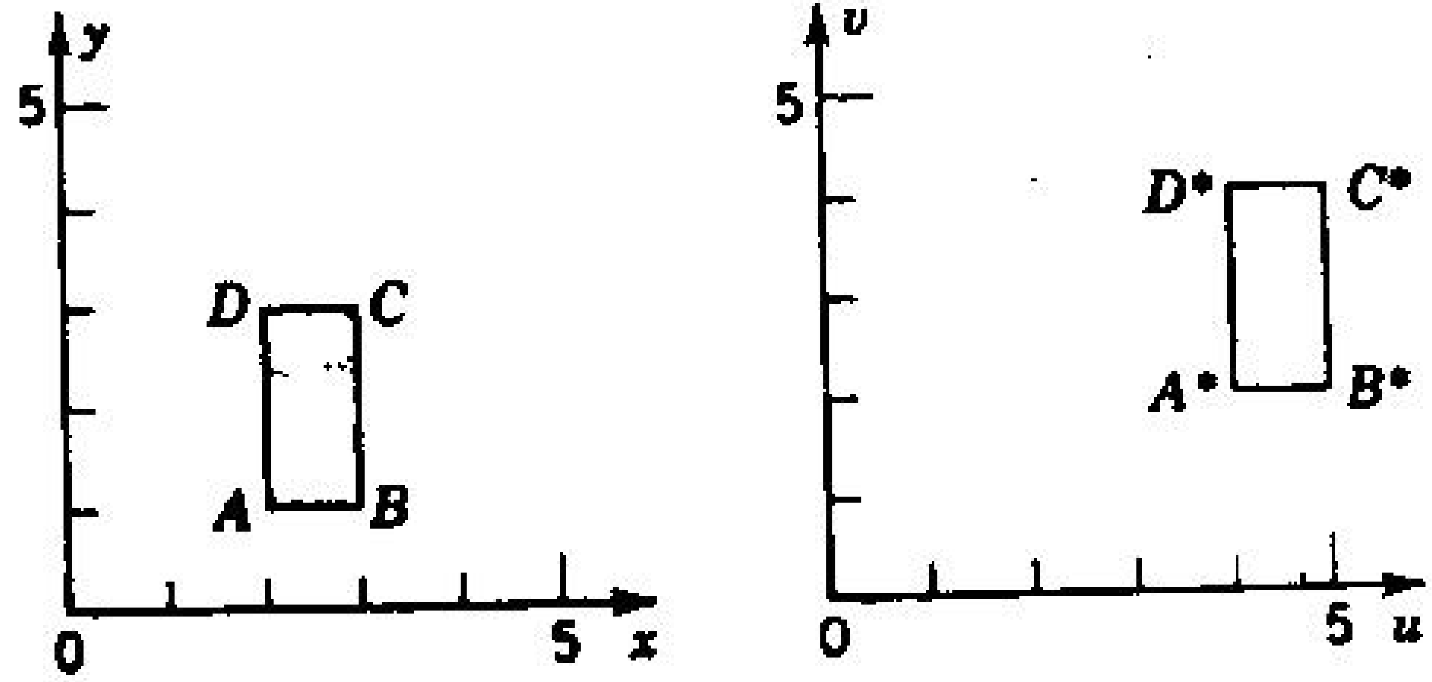
این تابع هر نقطه از صفحهٔ z را بدون هیچگونه تغییری به صفحهٔ w منتقل می‌کند. به‌عبارت دیگر این تابع هر شکل را بدون تغییر، انتقال می‌دهد.

(ب) نگاشت به‌وسیلهٔ تابع $w = f(z) = z + b$

اگر عدد ثابت و مختلط b را به‌صورت $b = b_x + ib_y$ و z را به‌صورت $z = x + iy$ نشان دهیم، خواهیم داشت،

$$w = f(x + iy) = (x + b_x) + i\,(y + b_y)$$

تحت این نگاشت هر نقطه به‌صورت (x,y) از صفحهٔ z به نقطهٔ $(x + b_x\,,\, y + b_y)$ از صفحهٔ w منتقل می‌شود. پس نگاشت $w = z + b$ یک انتقال[2] است. به‌طور مثال در شکل ۱-۷ نگاشت مستطیل $ABCD$ تحت تابع تبدیل $w=z+۲+i$ نشان داده شده است.



صفحة z

صفحة w

انتقال تحت w = z + ٢ + i

ج) نگاشت به‌وسیلهٔ تابع $w = f(z) = az \; ; \; a \neq 0$

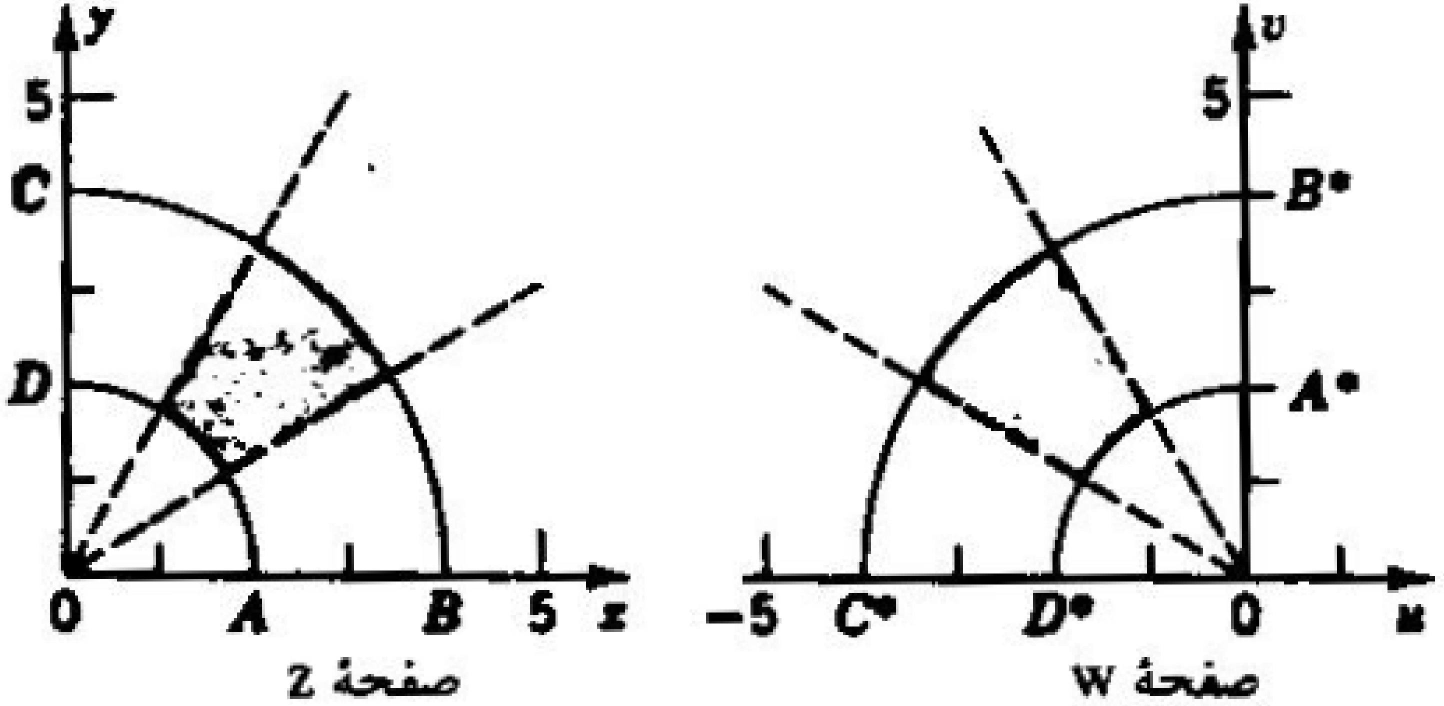
اگر عدد ثابت و مختلط a را در فرم قطبی به‌صورت $a = |a| \; e^{i\alpha}$ و z را نیز در فرم قطبی به‌صورت $z = |z| \, e^{i\theta}$ درنظر بگیریم. داریم:

$$w = f\left(|z|^{i\theta}\right) = |a| \; |z| \; e^{i(\alpha+\theta)} \qquad (۷-۳)$$

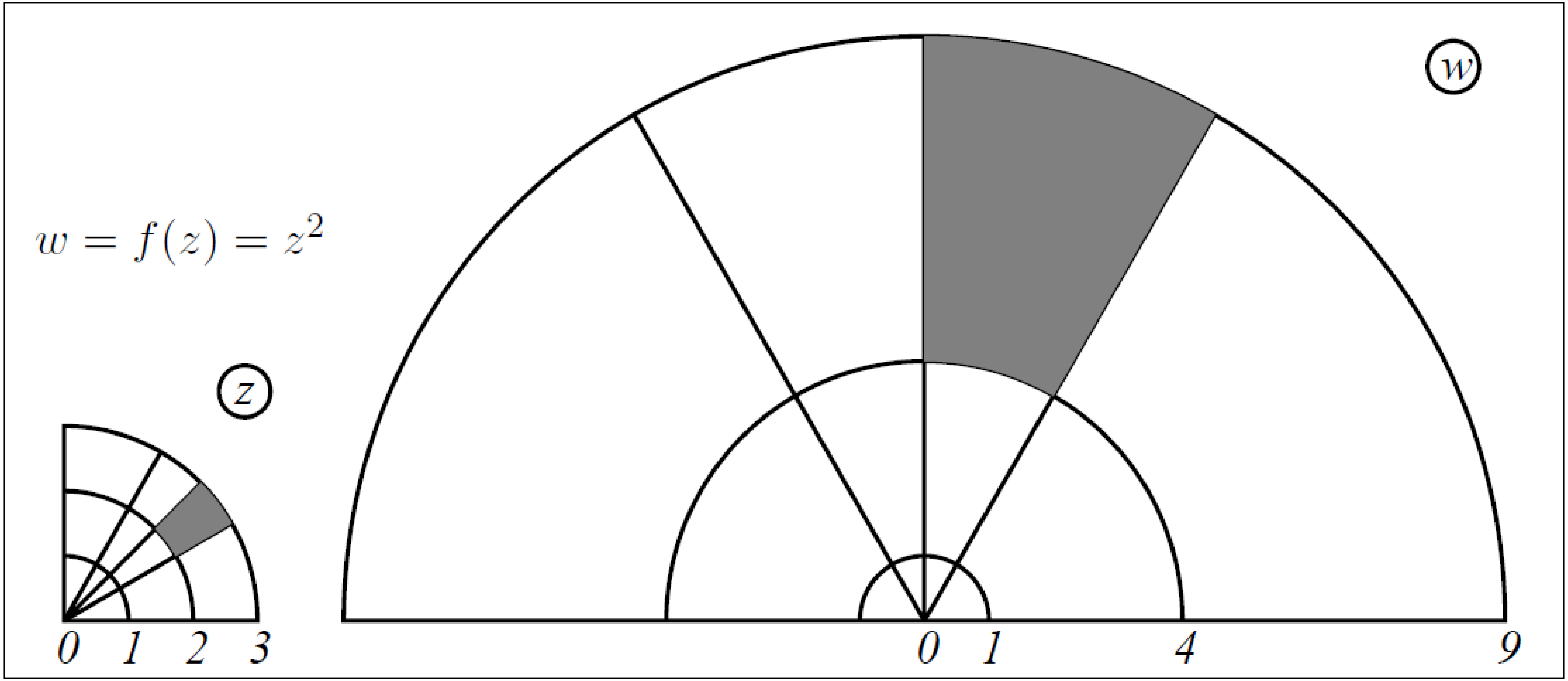
این نگاشت، شامل دوران بردار نمایش دهندهٔ z به اندازهٔ زاویهٔ α و همچنین انبساط یا انقباض آن است، بسته به اینکه $|a| > ۱$ یا $۱ > |a| > 0$ باشد. به‌عبارت دیگر این نگاشت هر نقطهٔ ناصفر به‌صورت $(\theta \; , \; |z|)$ را از صفحهٔ z به نقطهٔ $(\alpha + \theta$ و $|z| \; |a|)$ از صفحهٔ w تبدیل می‌کند. نگاشت:

$$w = f(z) = az \quad ; \quad |a| = ۱$$

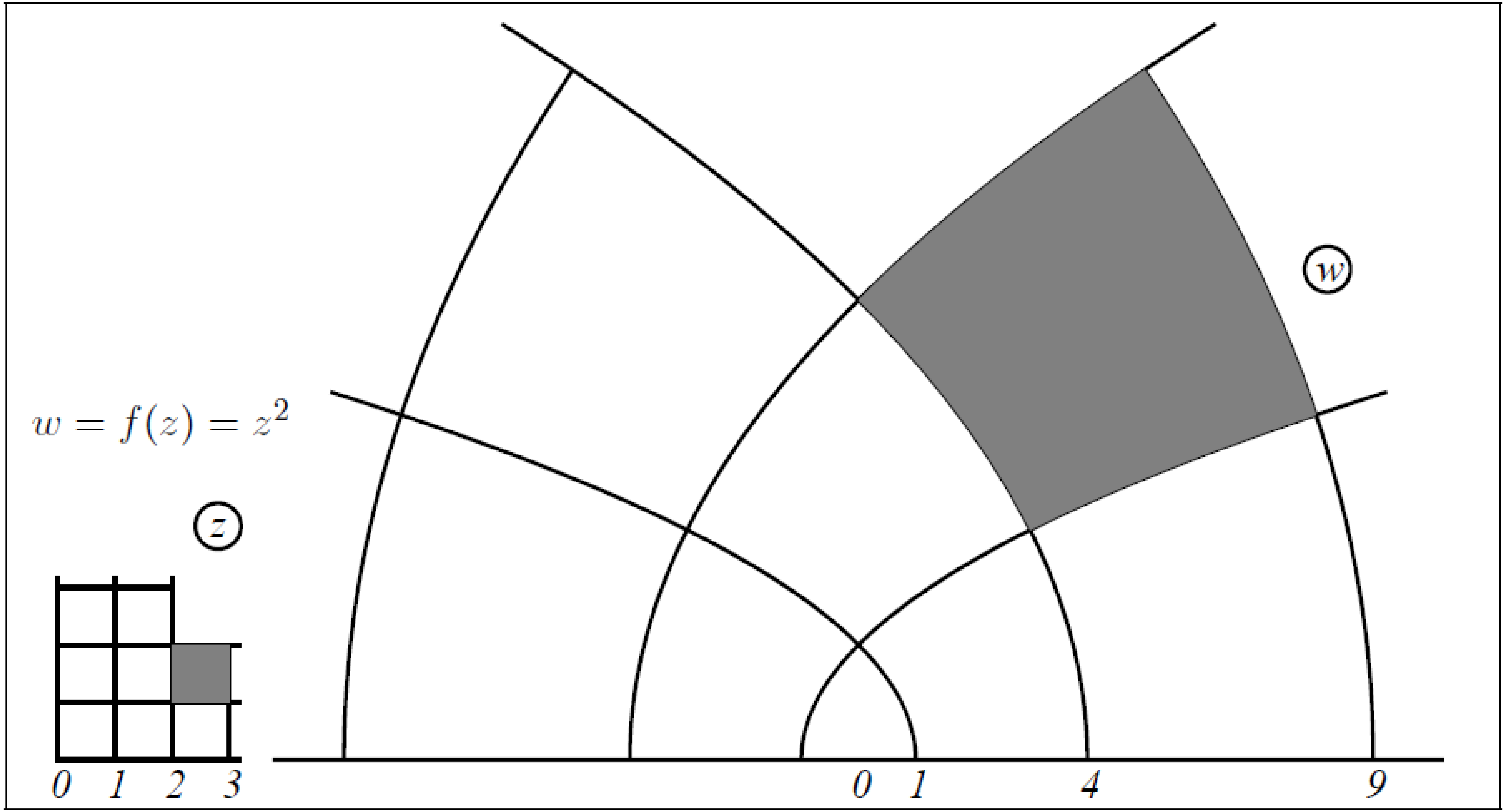
بردار نمایش دهندهٔ z را بدون تغییری در اندازهٔ آن، تحت زاویهٔ ثابت $\alpha = \arg a$ دوران می‌دهد. شکل ۲-۷ چنین دورانی را تحت نگاشت $w = iz$ نشان می‌دهد. توجه دارید که $\arg(i) = \frac{\pi}{۲}$ می‌باشد و جهت دوران پادساعتگرد منظور می‌شود.



دوران تحت $w = iz$ (زاویه دوران $\frac{\pi}{2}$ و پادساعتگرد)



$w = f(z) = z^2$
z
0 1 2 3
w
0 1 4 9



$w = f(z) = z^2$
z
w
0 1 2 3
0 1 4 9

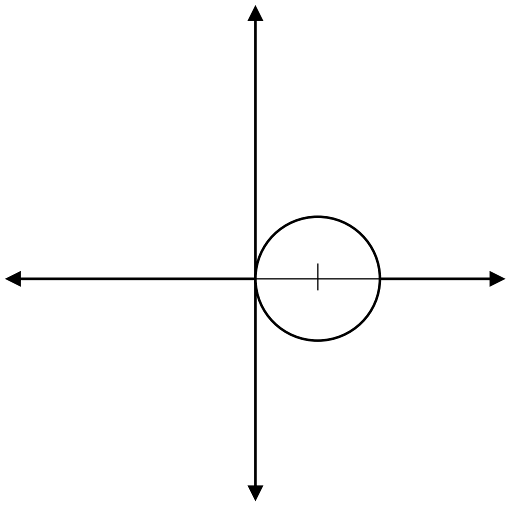
نگاشت تابع $|z-1| = 1$ توسط تابع $w = \frac{1}{z}$ را محاسبه کنید .

$$w = \frac{1}{Z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

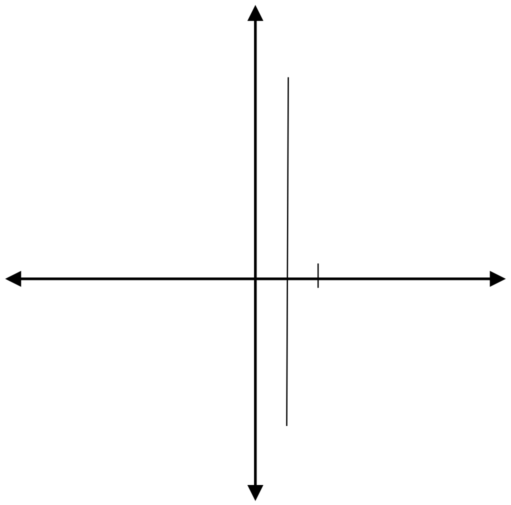
$$w = \begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad |z-1| = 1 \quad |x+iy-1| = 1 \quad \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 1$$

$$y^2 = 1 - (x-1)^2$$

$$u = \frac{x}{x^2+1-(x-1)^2} = \frac{x}{x^2+1-x^2-2x-1} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$



z - plane

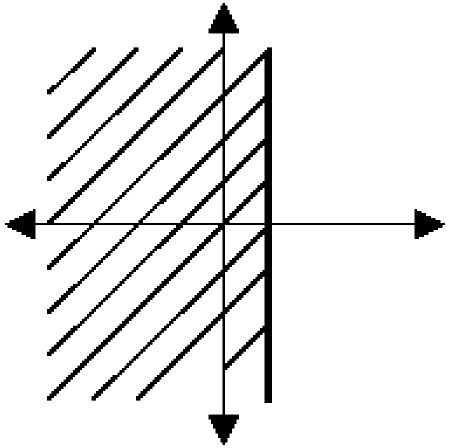


w-plane

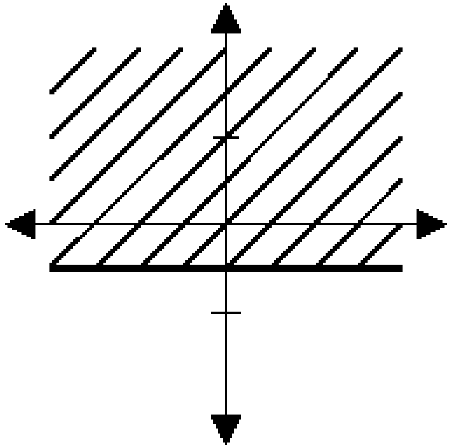
۲. نگاشت ناحیه $y > -1$ توسط $w = iz$ را مشخص کنید .

$iz = i(x+iy) = ix - y$

$$\begin{cases} u(x.y) = -y \\ V(x.y) = x \end{cases}$$



w- plane



z- plane

مطلوبست محاسبه نگاشت خط x=c توسط نگاشت $w = e^z$

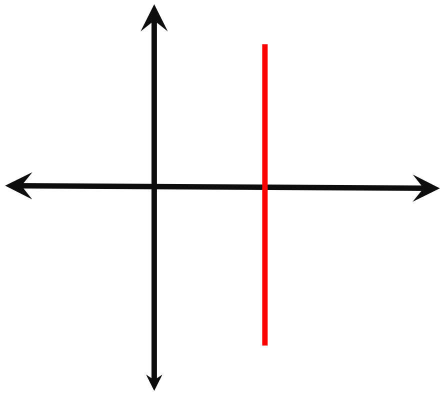
$$x = c$$

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^{c+iy} = e^c e^{iy} = e^c(\cos y + i\sin y) = e^c\cos y + ie^c\sin y$$

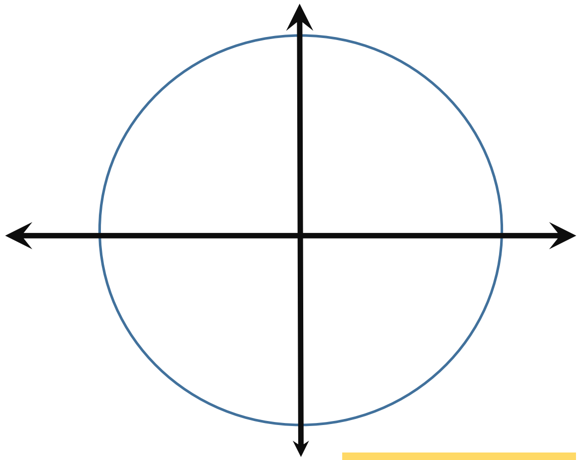
$$\begin{cases} u^2 = e^{2c}\cos^2 y \\ v^2 = e^{2c}\sin^2 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = e^c\cos y \\ v(x,y) = e^c\sin y \end{cases}$$

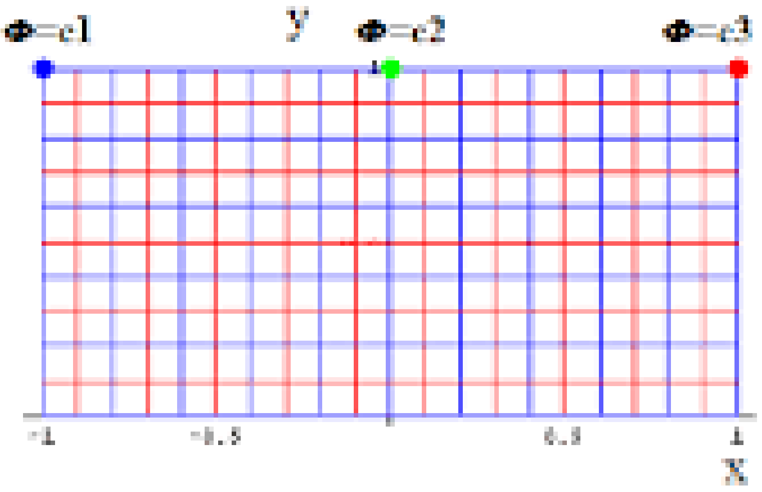
$$u^2 + v^2 = e^{2c}$$



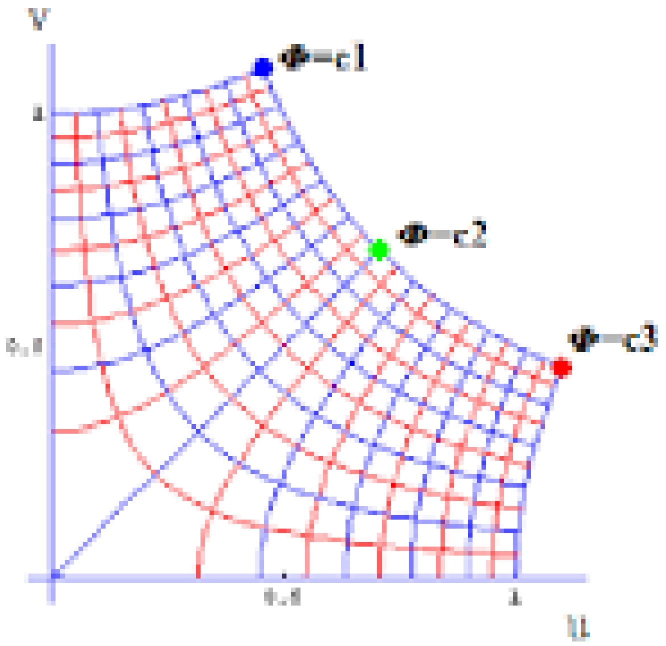
z- plane



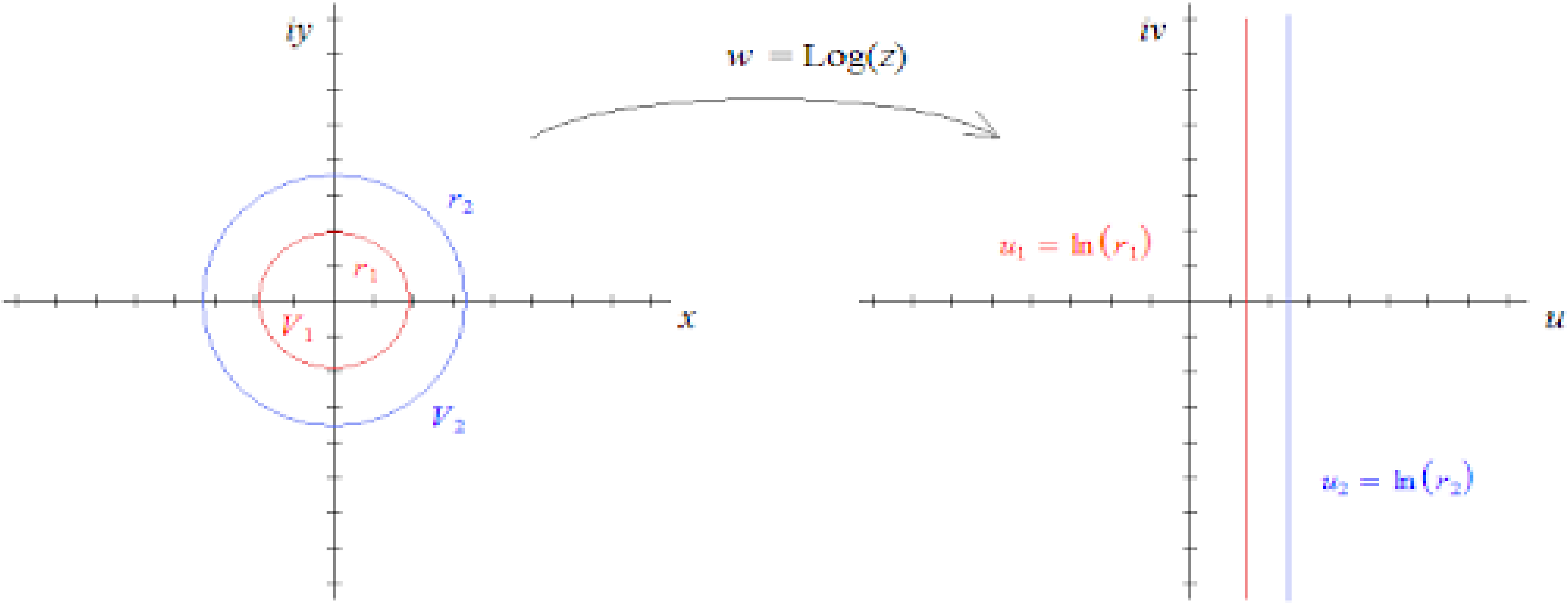
w- plane



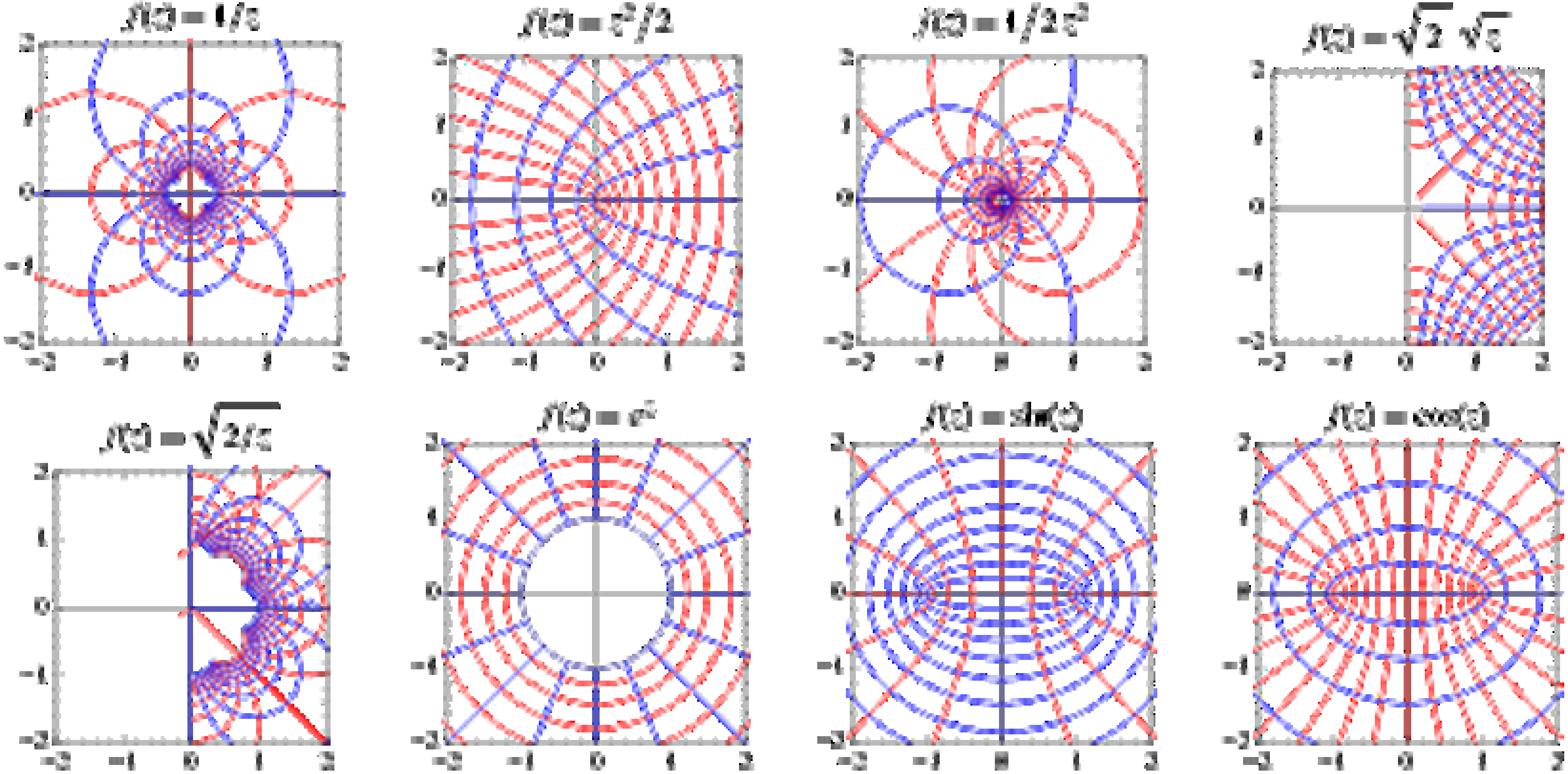
a. z plane



b. w plane



iy
x
r_2
r_1
V_1
V_2
$w = \mathrm{Log}(z)$
iv
u
$u_1 = \ln(r_1)$
$u_2 = \ln(r_2)$



f(z) = 1/z
f(z) = z²/2
f(z) = 1/2z²
f(z) = √2 √z
f(z) = √(2/z)
f(z) = e^z
f(z) = sin(z)
f(z) = cos(z)