انتگرال
فوریه

انتگرال فوریه

به یاد دارید که سری فوریه را برای توابع متناوب نوشتیم. حال آنکه بسیاری از مسائل مهندسی شامل توابع نامتناوب هستند. برای تحلیل این چنین مسائلی از انتگرال فوریه استفاده می‌کنیم. دراین‌حالت تابع نامتناوب $g(x)$ را همچون تابع متناوبی مانند $f(x)$ درنظر می‌گیریم که دورهٔ تناوبش بی‌نهایت است. یعنی:

$$g(x) = \lim_{T \to \infty} f_T(x)$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] \, d\omega$$

$$\begin{cases} A(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \\[2ex] B(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن بسط سری فوریه تابع متناوب $f_T(x)$ را نوشته و $w_n = \frac{2n\pi}{T}$ قرار می‌دهیم، داریم:

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)dx + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos w_n x \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\cos w_n x\,dx + \sin w_n x \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\sin w_n x\,dx\right]$$

در این بسط روابط اولر جایگذاری شده‌اند. اینک

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2(n+1)\pi}{T} - \frac{2n\pi}{T} = \frac{4\pi}{T}$$

و داریم:

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{2\pi}{T}$$

پس $\frac{\Delta w}{\pi} = \frac{2}{T}$ و بسط سری فوریه بالا را می‌توان نوشت:

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\cos(w_n x)\,\Delta w \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\cos w_n x\,dx$$

$$+ \sin(w_n x)\,\Delta w \int_{-T/2}^{T/2} f_T(x)\sin w_n x\,dx\Bigg]$$

حال T را به سمت بینهایت میل می‌دهیم. چون $\frac{1}{T} \longrightarrow 0$، اولین انتگرال سمت راست صفر می‌شود. به‌علاوه $\Delta w \frac{2\pi}{T} \longrightarrow 0$ و مجموعه بالا به انتگرال از ۰ تا ∞ تبدیل می‌شود.

(۱) انتگرال فوریه تابع زوج، فقط برحسب کسینوس است. به چنین حالتی، انتگرال فوریهٔ کسینوسی می‌گویند.

(۲) انتگرال فوریه تابع فرد، فقط برحسب سینوس است. به چنین حالتی، انتگرال فوریهٔ سینوسی می‌گویند.

شرایط استفاده از انتگرال فوریه به قرار ذیل است:

(۱) تابع $f(x)$ در شرایط دیریکله که در قسمت (۴-۱) عنوان شد، صدق کند.

(۲) انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ همگرا باشد یعنی $f(x)$ در فاصلهٔ ($\infty+$ و $\infty-$) مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد.

در این صورت:

(الف) اگر x نقطهٔ پیوستگی باشد، رابطه (۱۷-۱) نتیجه می‌شود.

(ب) اگر x نقطهٔ ناپیوستگی باشد، در طرف چپ رابطهٔ (۱۷-۱) به‌جای $g(x)$ عبارت $\frac{g_-(x) + g_+(x)}{۲}$ جایگزین می‌شود. ($g_-(x)$ و $g_+(x)$ به‌ترتیب حد چپ و حد راست تابع $g(x)$ در نقطهٔ x می‌باشند).

انتگرال فوریه تابع نامتناوب g(x)	B (ω)	A (ω)	نوع تابع	تابع متناوب معادل
$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[\,A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x]\,d\omega$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$	نه زوج، نه فرد	f(x)
$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} A(\omega)\cos\omega x\,dx$	0	$2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$	زوج	f(x)
$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} B(\omega)\sin\omega x\,d\omega$	$2\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$	0	فرد	f(x)

با فرض زوج‌بودن تابع $g(x)$، انتگرال فوریه‌اش را بیابید. $(a > 0)$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \, ; 0 < x < a \\ 0 \quad ; x > a \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} g(x) = \begin{cases} x^2 \quad ; 0 < x < a \\ 0 \, ; x > a \end{cases} \\ g(x) = g(-x) \, ; x < 0 \end{cases}$$

یعنی فاصلهٔ $(-\infty, 0)$ را با فرض زوج‌بودن تابع $g(x)$، پوشاندیم.

$$A(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{-\infty} f(x) \cos \omega x \, dx}_{H(x)} \xlongequal{\text{تابعی زوج است } H(x)} ۲ \int_{0}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx$$

$$A(\omega) = ۲ \int_{0}^{\infty} x^{۲} \cos \omega x \, dx$$

با استفاده از شیوهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\int x^{۲} \cos \omega x \, dx = \frac{x^{۲}}{\omega} \sin \omega x + \frac{۲x}{\omega^{۲}} \cos \omega x - \frac{۲}{\omega^{۳}} \sin \omega x$$

$$A(\omega) = ۲ \left[\frac{x^{۲}}{\omega} \sin \omega x + \frac{۲x}{\omega^{۲}} \cos \omega x - \frac{۲}{\omega^{۳}} \sin \omega x \right]_{0}^{a}$$

$$A(\omega) = ۲ \left[\frac{a^{۲}}{\omega} \sin \omega a + \frac{۲a}{\omega^{۲}} \cos \omega a - \frac{۲}{\omega^{۳}} \sin \omega a \right]$$

$$A(\omega) = \frac{۲}{\omega} \left[\left(a^{۲} - \frac{۲}{\omega^{۲}} \right) \sin a\omega + \frac{۲a}{\omega} \cos a\omega \right]$$

حال، با استفاده از رابطهٔ (۱۸–۱)، $B(\omega)$را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x) \sin \omega x \, dx}_{H(x)} \quad \overset{\text{تابعی فرد است } H(x)}{=\!=\!=\!=\!=} \quad 0$$

با جایگذاری $A(\omega)$و $B(\omega)$ در رابطهٔ (۱۷–۱) داریم:

$$g(x) = \frac{2}{x} \int_{0}^{\infty} \left[(a^{2} - \frac{2}{\omega^{2}} \sin a\omega + \frac{2a}{\omega} \cos a\omega \right] \frac{\cos \omega x}{\omega} \, d\omega$$

انتگرال فوریه تابع ذیل را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} g(x) = e^{-x} + e^{-۲x} & ; x > 0 \\ g(x) = g(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

حل: با توجه به زوج‌بودن تابع $g(x)$ و استفاده از جدول ۲−۱ داریم:

$$A(\omega) = ۲\int_0^{+\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \quad ; B(\omega) = 0$$

$$A(\omega) = ۲\left\{\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos \omega x \, dx + \int_0^{+\infty} e^{-۲x} \cos \omega x \, dx\right\}$$

$$\int e^{-x} \cos \omega x \, dx = \frac{e^{-x}}{1 + \omega^2} (-\cos \omega x + \omega \sin \omega x)$$

$$\int e^{-2x} \cos \omega x \, dx = \frac{e^{-2x}}{4 + \omega^2} (-2\cos \omega x + \omega \sin \omega x).$$

لذا $A(\omega)$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A(\omega) = 2 \left[\frac{1}{1 + \omega^2} \left(-e^{-x} \cos \omega x + \omega e^{-x} \sin \omega x \right)_0^{+\infty} + \frac{1}{4 + \omega^2} \cdot \left(-2e^{-2x} \cos \omega x + \omega e^{-2x} \sin \omega x \right)_0^{+\infty} \right]$$

$$A(\omega) = 2 \left[\frac{1}{1 + \omega^2} + \frac{2}{4 + \omega^2} \right] = \frac{6\omega^2 + 12}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}$$

با جایگذاری $A(\omega)$ و $B(\omega)$ در رابطهٔ (۱۷-۱) داریم:

$$g(x) = \frac{6}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 + 2}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} \cos \omega x \, d\omega$$

نشان دهید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x + \omega \sin \omega x}{1 + \omega^2}\, d\omega = \begin{cases} 0\,;\ x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2}\,;\ x = 0 \\ \pi e^{-x}\,;\ x > 0 \end{cases}$$

حل: تابع $g(x) = \begin{cases} 0\,;\ x < 0 \\ \pi e^{-x}\,;\ x > 0 \end{cases}$ را درنظر می‌گیریم و انتگرال فوریه آن‌را به‌دست می‌آوریم.

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \omega x\, dx = \int_0^{+\infty} \pi e^{-x} \cos \omega x\, dx$$

با استفاده از شیوهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\int e^{-x} \cos \omega x \, dx = \frac{e^{-x}}{۱ + \omega^۲} (-\cos \omega x + \omega \sin \omega x)$$

لذا داریم:

$$A(\omega) = \frac{\pi}{۱ + \omega^۲} \Big[-e^{-x} \cos \omega x + e^{-x} \omega \sin \omega x\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{۱ + \omega^۲}$$

$$B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \omega x \, dx = \int_0^{+\infty} \pi e^{-x} \sin \omega x \, dx$$

با استفاده از شیوهٔ انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\int e^{-x} \sin \omega x \, dx = \frac{e^{-x}}{۱ + \omega^۲} (-\sin \omega x - \omega \cos \omega x)$$

لذا خواهیم داشت:

$$B(\omega) \frac{\pi}{۱ + \omega^۲} \Big[-e^{-x} \sin \omega x - \omega e^{-x} \cos \omega x\Big]_0^{+\infty}$$

$$B(\omega) = \frac{\pi\omega}{۱ + \omega^۲}$$

با جایگذاری $A(\omega)$ و $B(\omega)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega x + \omega \sin \omega x}{۱ + \omega^۲} d\omega = g(x) = \begin{cases} 0 \; ; x < 0 \\ \pi e^{-x} \, ، x > 0 \end{cases}$$