ریاضی مهندسی

سری فوریه

در اوایل قرن نوزدهم، فوریه، ریاضیدان فرانسوی، ضمن تحقیقات خود در بارهٔ انتقال گرما به کشف برجسته‌ای در زمینهٔ سریهای مثلثاتی خاصی که امروزه نام او را بر خود دارند نائل شد.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

گوئیم تابع $f(x)$ متناوب با تناوب T است، هرگاه به‌ازای هر x حقیقی داشته باشیم:

$$f(x) = f(x + T)$$

فرض که تابع متناوب $f(x)$ در بازهٔ $\left(-\frac{T}{۲}, \frac{T}{۲}\right)$ تعریف شده باشد و در خارج از این بازه به‌وسیلهٔ رابطهٔ $f(x+T)=f(x)$ تعریف شود. آنگاه سری فوریه یا بسط فوریه نظیر تابع متناوب $f(x)$ به‌صورت ذیل نوشته می‌شود:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=۱}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{۲\pi n}{T} x + b_n \sin \frac{۲\pi n}{T} x\right)$$

که در آن a_0 ، a_n و b_n ضرایب اولر نامیده می‌شوند و با استفاده از روابطی که متعاقباً معرفی می‌شوند، قابل محاسبه‌اند.

a_0 که درواقع بیانگر مقدار متوسط تابع $f(x)$ در بازهٔ $\left(-\frac{T}{۲}, \frac{T}{۲}\right)$ است، به‌صورت ذیل بیان می‌شود:

$$a_0 = \frac{۱}{T} \int_{-T/۲}^{T/۲} f(x)\, dx$$

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{۲}{T} \int_{-\mathrm{T}/۲}^{\mathrm{T}/۲} f(x) \cos \frac{۲\pi n}{T} x \, dx$$

$$b_{\mathrm{n}} = \frac{۲}{T} \int_{-\mathrm{T}/۲}^{\mathrm{T}/۲} f(x) \sin \frac{۲\pi n}{T} x \, dx$$

گاهی اوقات برای تعیین ضرایب اولر بهتر است از روابط زیر استفاده کنیم که در آنها c هر عدد حقیقی دلخواهی می‌تواند باشد.

$$a_0 = \frac{۱}{T} \int_{c}^{c+T} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{۲}{T} \int_{c}^{c+T} f(x) \cos \frac{۲\pi n}{T} x\, dx \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

$$b_n = \frac{۲}{T} \int_{c}^{c+T} f(x) \sin \frac{۲\pi n}{T} x\, dx$$

برای به‌دست آوردن رابطه a_0 برای حالت خاص $T=2\pi$ از طرفین رابطه (۳-۱) بین π- تا π انتگرال می‌گیریم.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \right)$$

اولین انتگرال سمت راست برابر $2\pi a_0$ و تمام انتگرال‌های دیگر این سمت صفر می‌باشند. بنابراین داریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

برای به‌دست آوردن دیگر ضرایب a_n برای حالت خاص $T=2\pi$ طرفین رابطه (۳-۱) را در $\cos mx$ ضرب کرده و از $-\pi$ تا π انتگرال می‌گیریم که در آن m یک عدد صحیح مثبت می‌باشد. داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx \right.$$

$$\left. + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx\,dx\right]$$

اولین انتگرال سمت راست صفر بوده و با استفاده از روابط مثلثاتی داریم:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin (n+m)x \, dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin (n-m)x \, dx$$

با انتگرال‌گیری می‌توان نشان داد که چهار انتگرال سمت راست صفر می‌باشند به‌غیر از انتگرال دوم که وقتی $n=m$ باشد برابر π است. پس داریم:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

«شرایط دیریکله»

(۱) تابع $f(x)$ در بازهٔ $c < x < c + T$ متناوب با دورهٔ تناوب T باشد.

(۲) $f(x)$ و $f'(x)$ در بازهٔ $c < x < c + T$ به‌طور قطعه‌ای پیوسته باشند.

هرگاه شرایط دیریکله برقرار باشند آنگاه سری ذیل:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} x\right)$$

همگرا می‌شود به:

(الف) $f(x)$، اگر x نقطهٔ پیوستگی باشد.

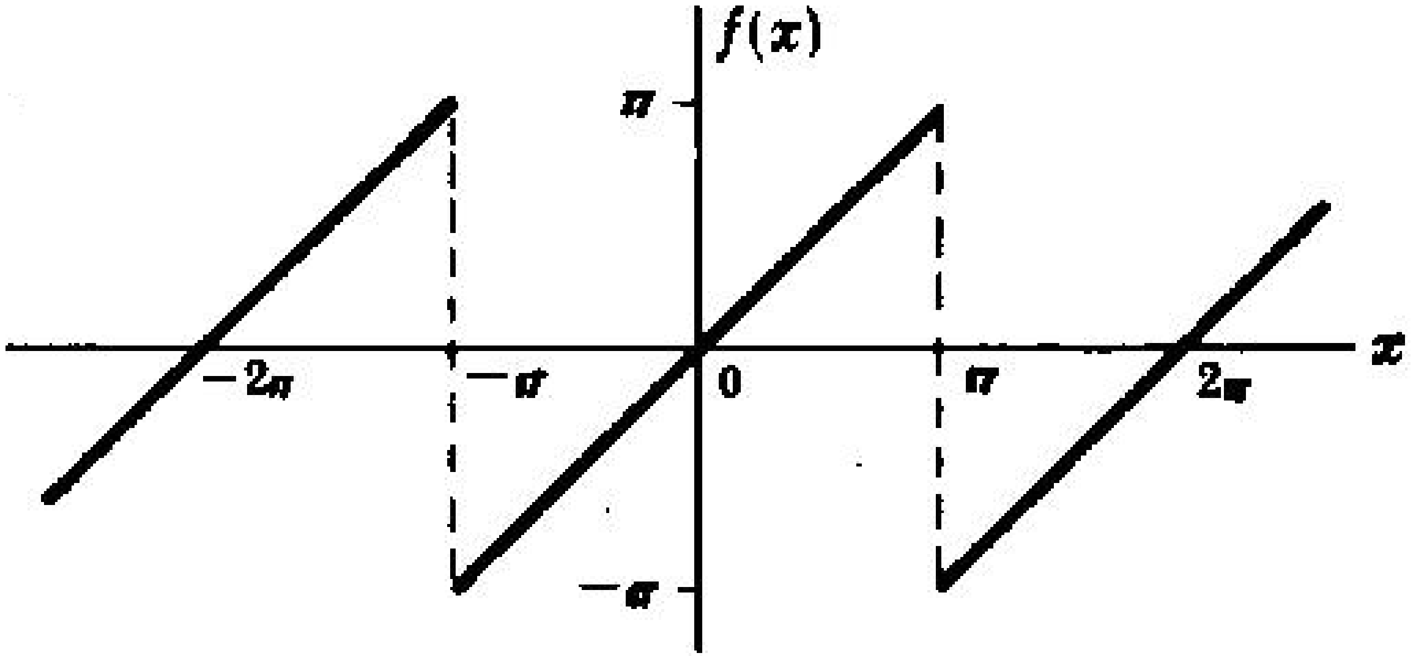
(ب) $\frac{f_-(x) + f_+(x)}{2}$ اگر x نقطهٔ ناپیوستگی باشد. $f_-(x)$ و $f_+(x)$ به‌ترتیب حد چپ و حد راست $f(x)$ در نقطهٔ x می‌باشند.)

جدول ۱-۱ روابط ضرائب اولر با توجه به زوج یا فردبودن تابع در $f(x)$.

بسط فوریه تابع $f(x)$	b_n	a_n	a_0	نوع تابع	تابع
$a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x + b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x$	$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,dx$	$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx$	$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx$	نه زوج، نه فرد	$f(x)$
$a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{T}x$	0	$\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi n}{T}x\,dx$	$\frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\,dx$	زوج	$f(x)$
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n}{T}x$	$\frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi n}{T}x\,dx$	0	0	فرد	$f(x)$

سری فوریه تابع ذیل را نوشته و سه جملهٔ اول مخالف صفر آن‌را به‌دست آورید.

$$f(x) = x\,,\ -\pi < x < \pi$$



حل: با توجه به فردبودن تابع و با عنایت به جـدول ۱-۱، $a_0 = 0$ و $a_n = 0$ است لذا کافی است، b_n را محاسبه کنیم:

$$b_n = \frac{۲}{T}\int_{-T/۲}^{T/۲} f(x)\sin\frac{۲\pi n}{T}x\,dx\ ;\ T = ۲\pi$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx \xlongequal{\text{تابعی زوج است } h(x)} \frac{۲}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$b_n = \frac{۲}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

با استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$I = \int x\sin nx\,dx$$

$$\begin{cases}\sin nx\,dx = dv\\ x = u\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\frac{۱}{n}\cos nx = V\\ dx = du\end{cases}$$

$$I = uv - \int vdu = -\frac{x}{n}\cos nx - \int -\frac{۱}{n}\cos nx\,dx$$

$$I = \frac{-x}{n} \cos nx + \frac{۱}{n^۲} \sin nx$$

$$b_n = \frac{۲}{\pi} \left[\frac{-x}{n} \cos nx + \frac{۱}{n^۲} \sin nx \right]_0^\pi$$

$$b_n = \frac{۲}{\pi} \left[\frac{-\pi}{n} \cos (n\pi) + \frac{۱}{n^۲} \sin (n\pi) + \frac{0}{n} \cos (0) - \frac{۱}{n^۲} \sin (0) \right]$$

با توجه به آنکه $(n = ۱,۲,۳,...)$, $\sin (nx) = 0$, $\cos (n\pi) = (-۱)^n$ داریم:

$$b_n = \frac{-۲}{n} (-۱)^n = \frac{۲}{n} (-۱)^{n+۱}$$

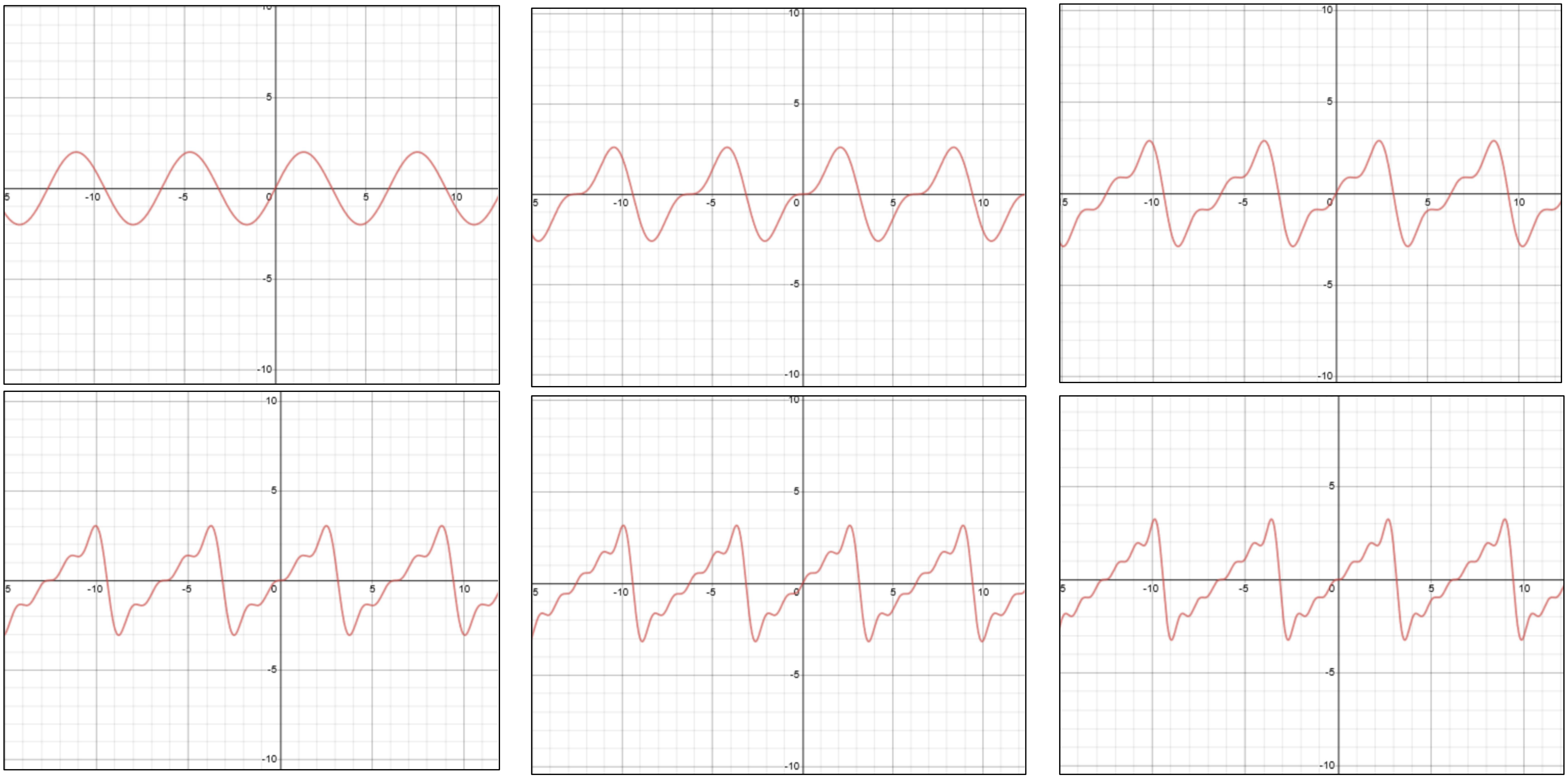
با جایگذاری مقادیر a_0 ، a_n و b_n در رابطه (۳-۱) داریم:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲}{n} (-۱)^{n+۱} \sin nx$$

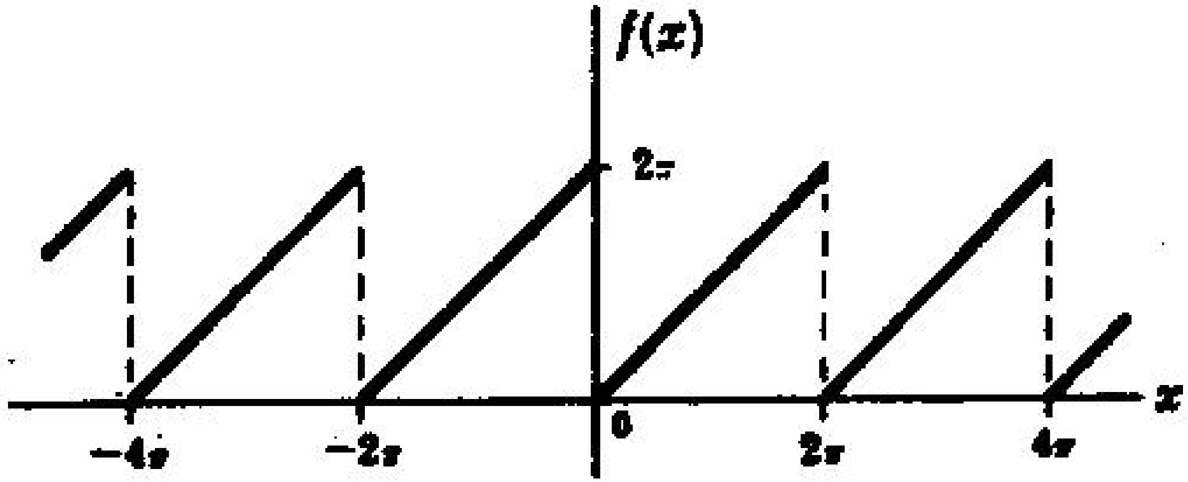
و یا:

$$f(x) = ۲ \sin x - \sin ۲x + \frac{۲}{۳} \sin ۳x - ...0$$



سری فوریه تابع ذیل را نوشته و چهار جمله اول مخالف صفر آن‌را به‌دست آورید.

$$f(x) = x\ ,\ 0 < x < 2\pi$$



$$a_0 = \frac{1}{T}\int_c^{c+T} f(x)\,dx\ ;\ T = ۲\pi$$

$$a_0 = \frac{1}{۲\pi}\int_c^{c+۲\pi} f(x)\,dx$$

کاملاً واضح است که اگر مقدار c را صفر درنظر بگیریم بین کرانه‌های ضرائب اولر و دامنهٔ بیان شده برای تابع هماهنگی به‌وجود می‌آید. لذا:

$$a_0 = \frac{1}{۲\pi}\int_0^{۲\pi} x\,dx = \frac{1}{۲\pi}\left[\frac{1}{۲}x^{۲}\right]_0^{۲\pi} = \pi$$

$$a_n = \frac{۲}{T}\int_c^{c+T} f(x)\cos\frac{۲\pi n}{T}x\,dx\ ;\ T = ۲\pi\ ,\ c = 0$$

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\int_0^{۲\pi} x\cos nx\,dx$$

انتگرال $I = \int x\cos nx\,dx$ را در مسئله (۲) به‌صورت زیر حل کردیم:

$$I = \frac{x}{n}\sin nx + \frac{۱}{n^۲}\cos nx$$

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx + \frac{۱}{n^۲}\cos nx\right]_0^{۲\pi}$$

$$a_n = \frac{۱}{\pi}\left[\frac{۲\pi}{n}\sin(۲n\pi) + \frac{۱}{n^۲}\cos(۲n\pi) - \frac{0}{n}\sin(0) - \frac{۱}{n^۲}\cos(0)\right]$$

با توجه به اینکه $(n = ۱,۲,۳,\ldots)$ $\sin ۲n\pi = 0$ و $\cos ۲n\pi = ۱$ داریم:

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{۲}{\pi} \int_c^{c+T} f(x) \sin \frac{۲\pi n}{T} x \, dx \; ; \; T = ۲\pi \, , \, c = 0$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi} \int_0^{۲\pi} x \sin nx \, dx$$

انتگرال $I = \int x \sin nx \, dx$ را در مسئله (۳) به‌صورت زیر حل کردیم:

$$I = -\frac{x}{n} \cos nx + \frac{۱}{n^۲} \sin nx$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{۱}{n^۲} \sin nx \right]_0^{۲\pi}$$

$$b_n = \frac{۱}{\pi} \left[-\frac{۲\pi}{n} \cos (۲\pi n) + \frac{۱}{n^۲} \sin (۲\pi n) + \frac{0}{n} \cos (0) - \frac{۱}{n^۲} \sin (0) \right]$$

با توجه به این که $(n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ ، $\sin(۲n\pi) = ۰$ و $\cos(۲n\pi) = ۱$ داریم:

$$b_n = \frac{-۲}{n}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=۱}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$f(x) = \pi + \sum_{n=۱}^{\infty} -\frac{۲}{n} \sin nx$$

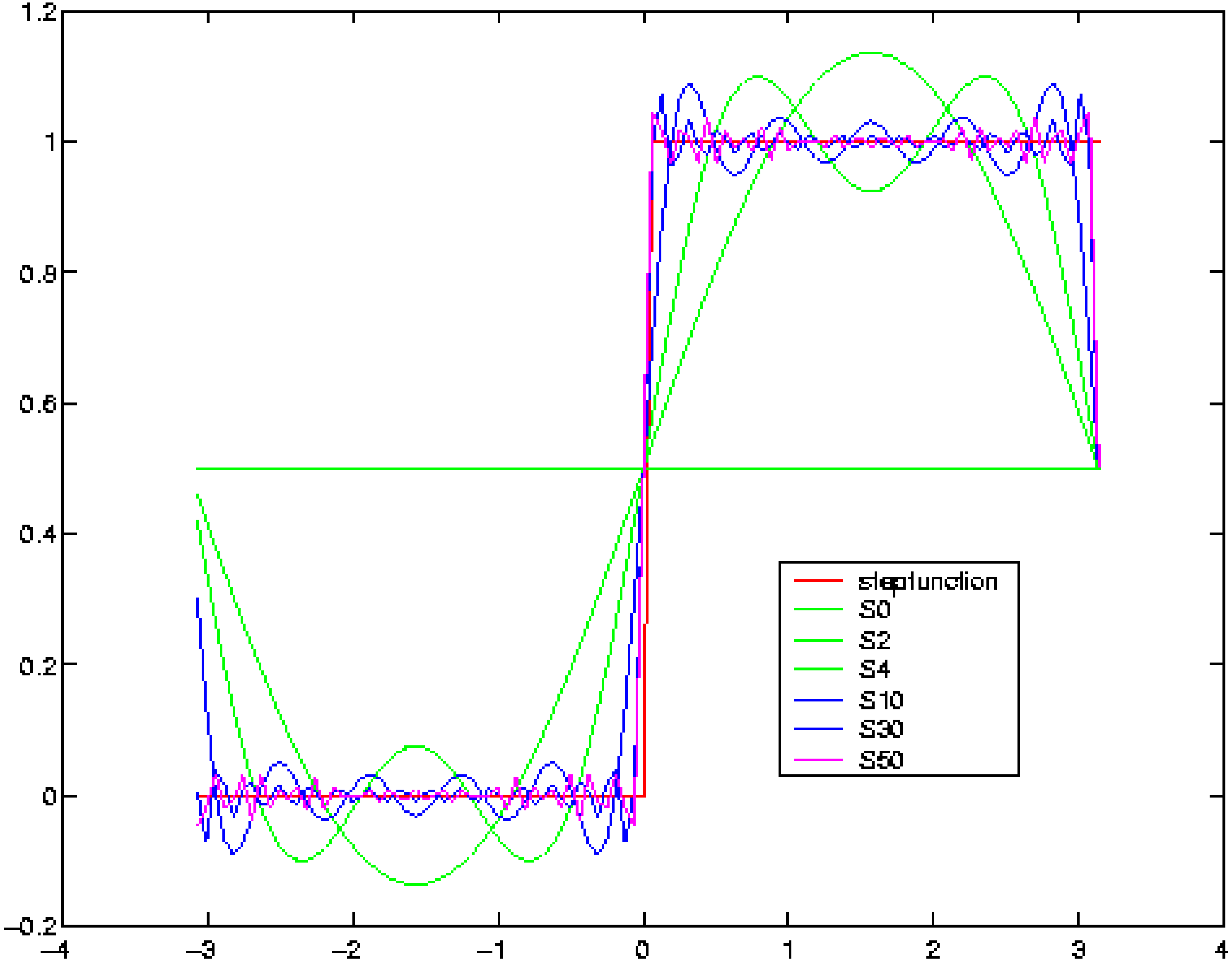
$$f(x) = \pi - ۲ \sin x - \sin ۲x - \frac{۲}{۳} \sin ۳x - \dots$$

Find the Fourier series of the **square wave**, for which the function over one period is

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{if } \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$$

The function is *odd* and has average value zero, with period $T = 1$. Therefore, all a_k vanish; one must only compute the integrals to find the b_k:

$$\begin{aligned} b_k &= 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi kx\, dx \\ &= 2\int_0^{1/2} \sin 2\pi kx\, dx - 2\int_{1/2}^1 \sin 2\pi kx\, dx \\ &= 2\left[-\frac{\cos 2\pi kx}{2\pi k}\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} + \frac{\cos 2\pi kx}{2\pi k}\Bigg|_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \right] \\ &= 2\left[-\frac{\cos \pi k}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi k} + \frac{\cos 2\pi k}{2\pi k} - \frac{\cos \pi k}{2\pi k} \right] \\ &= \frac{2}{\pi k}\left(\sin^2 \frac{\pi k}{2} - \frac{1}{2}\cos \pi k + \frac{1}{2}\cos 2\pi k \right) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\pi k} & \text{if } k \text{ is odd} \\ 0 & \text{if } k \text{ is even,} \end{cases} \end{aligned}$$



1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
stepfunction
S0
S2
S4
S10
S30
S50

تمرین سری فوریه

$$\begin{cases} f(x) = |x| \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = |x| \\ -\pi < x < \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = e^x \\ 0 < x < 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = |e^x| \\ 0 < x < 2\pi \end{cases}$$