انتگرال مختلط

کاربرد۲و۳

محاسبه انتگرالهای ناسرهٔ توابع گویا

انتگرال ناسرهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$$

اگـر $p(x)$ و $q(x)$ چند جمله‌ایهای حقیقی باشند و درجه $q(x)$ حداقل ۲ مرتبه بیشتر از درجه $p(x)$ باشد و معادله $q(x)=0$ ریشه حقیقی نداشته باشد آنگاه می‌توان انتگرال ناسرهٔ (۱۲–۶) را با استفاده از تئوری باقیمانده، به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i\, \Sigma \text{ (باقیمانده‌های تابع } \frac{p(z)}{q(z)} \text{ در قطبهای این تابع که در نیم صفحهٔ بالایی صفحهٔ مختلط واقعند.)}$$

به‌عبارت دیگر:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\, dx = 2\pi i \sum_{y>0} Res\, \frac{p(z)}{q(z)}$$

با استفاده از روش باقیمانده، حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{۱ + x^۲}$$

چون در تابع حقیقی $f(x) = \frac{۱}{۱ + x^۲}$ درجهٔ مخرج دو مرتبه از درجهٔ صورت بیشتر است و همچنین مخرج ریشه حقیقی ندارد، می‌توانیم از رابطهٔ (۱۳-۶) استفاده کنیم. داریم:

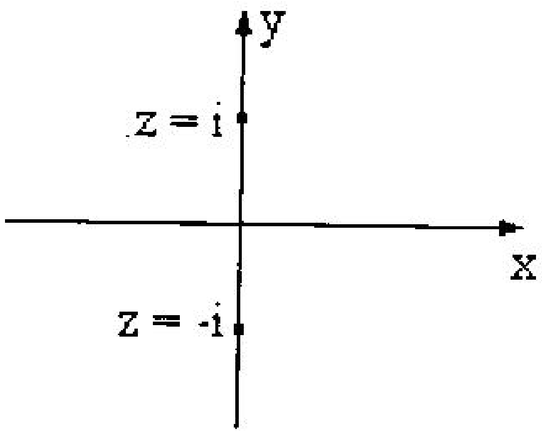
$$f(z) = \frac{۱}{۱ + z^۲}$$

ابتدا نقاط نامعین تابع $f(z)$ را می‌یابیم:

$$۱ + z^۲ = 0 \Rightarrow z = i \, , \, m = ۱$$

$$z = -i \, , \, m = ۱$$

حال این قطبهای به‌دست آمده را روی صفحهٔ مختلط رسم کرده و ازبین آنها، آن را انتخاب می‌کنیم که در نیم صفحه فوقانی این صفحه مختصات واقع است.



با توجه به شکل نقطهٔ $z = i$، نقطه مورد نظر است.

$$\underset{z=i}{Res}\, f(z) = \underset{z \to i}{limit} \frac{۱}{۲z} = \frac{۱}{۲i} = -\frac{i}{۲}$$

حال داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{۱ + x^۲} = ۲\pi i \left(-\frac{i}{۲}\right) = \pi$$

مسئلهٔ ۳۲-۶: با استفاده از روش باقیمانده، حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^6}$$

حل: با استفاده از توضیحات قسمت ۴-۶ داریم:

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^6}$$

ابتدا نقاط نامعین (قطبها) را پیدا می‌کنیم:

$$1 + z^6 = 0 \Rightarrow z = \sqrt[6]{-1} \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi \end{cases}$$

$$\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{1} \left[\cos \frac{2k\pi + \pi}{6} + i\sin \frac{2k\pi + \pi}{6}\right]$$

$$k = 0 \Rightarrow z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6} = e^{\pi i/6}, \ m = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2} = e^{\pi i/2}, \ m = 1$$

$$k = 2 \Rightarrow z_3 = \cos \frac{5\pi}{6} + i\sin \frac{5\pi}{6} = e^{5\pi i/6}, \ m = 1$$

$$k = 3 \Rightarrow z_4 = \cos \frac{7\pi}{6} + i\sin \frac{7\pi}{6} = e^{7\pi i/6}, \ m = 1$$

$$k = 4 \Rightarrow z_5 = \cos \frac{3\pi}{2} + i\sin \frac{3\pi}{2} = e^{3\pi i/2}, \ m = 1$$

$$k = 5 \Rightarrow z_6 = \cos \frac{11\pi}{6} + i\sin \frac{11\pi}{6} = e^{11\pi i/6}, \ m = 1$$

از آنجایی که نقاط z_1 و z_2 و z_3 در نیم صفحه فوقانی قرار دارند، خواهیم داشت:

$$\underset{z=e^{(\pi/6)i}}{Res}\ f(z) = \underset{z\to e^{(\pi/6)i}}{limit}\ \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6e^{5(\pi/6)i}} = \frac{e^{-5(\pi/6)i}}{6} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}{6}$$

$$\underset{z=e^{(\pi/2)i}}{Res}\ f(z) = \underset{z\to e^{(\pi/2)i}}{limit}\ \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6e^{5(\pi/2)i}} = \frac{e^{-5(\pi/2)i}}{6} = \frac{-i}{6}$$

$$\underset{z=e^{5(\pi/6)i}}{Res}\ f(z) = \underset{z\to e^{5(\pi/6)i}}{limit}\ \frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6e^{25(\pi/6)i}} = \frac{e^{-25(\pi/6)i}}{6} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}{6}$$

حال داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = 2\pi i \left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}{6} - \frac{i}{2} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}}{6} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx$$

حل: چون در تابع حقیقی $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ درجهٔ مخرج دو مرتبه از درجهٔ صورت بزرگتر است و همچنین مخرج، ریشهٔ حقیقی ندارد لذا از رابطهٔ (۱۳-۶) می‌توان استفاده کرد. داریم:

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$$

ابتدا قطبها را می‌یابیم:

$$(z^2+a^2)(z^2+b^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = ai\,;\ m = 1 \\ z = -ai\,;\ m = 1 \\ z = bi\,,\ m = 1 \\ z = -bi\,;\ m = 1 \end{cases}$$

از میان این قطبها فقط $z = ai$ و $z = bi$ در نیم صفحهٔ فوقانی واقعند لذا:

از میان این قطبها فقط $z = ai$ و $z = bi$ در نیم صفحهٔ فوقانی واقعند لذا:

$$\operatorname*{Res}_{z=ai} f(z) = \operatorname*{limit}_{z \to ai} (z - ai) \frac{z^۲}{(z - ai)(z + ai)(z^۲ + b^۲)}$$

$$= \operatorname*{limit}_{z \to ai} \frac{z^۲}{(z + ai)(z^۲ + b^۲)} = \frac{-a^۲}{۲ai(b^۲ - a^۲)} = \frac{a}{۲i(a^۲ - b^۲)}$$

به‌طور مشابه می‌توان دید:

$$\operatorname*{Res}_{z=bi} f(z) = \frac{b}{۲i(b^۲ - a^۲)}$$

لذا با استفاده از رابطهٔ (۱۳-۶) داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^۲}{(z^۲ + a^۲)(x^۲ + b^۲)} = ۲\pi i \left[\frac{a}{۲i(a^۲ - b^۲)} + \frac{b}{۲i(b^۲ - a^۲)}\right] = \frac{\pi}{a + b}$$

انتگرالهای فوریه

انتگرالهای حقیقی

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos x\, dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin x\, dx$$

که در ارتباط با انتگرال فوریه می‌باشند را قبلاً در قسمت ۱۷-۱ مشاهده کردید. اگر تابع حقیقی $f(x)$، تابعی گویا به‌صورت $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ درنظر گرفته شود و درجه مخرج حداقل دو مرتبه بیشتر از درجه صورت باشد و همچنین معادله $q(x) = 0$ ریشه حقیقی نداشته باشد، آنگاه انتگرالهای (۶-۱۵) را با شیوه‌ای مشابه آنچه در قسمت (۴-۶ ب) دیدیم می‌توان محاسبه کرد. بدین منظور ابتدا انتگرال زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iax}\, dx \qquad (۶-۱۶)$$

اگر $(a > 0)$ باشد با توجه به تحلیلی‌بودن تابع e^{iaz} می‌توان نوشت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iax}\, dx = ۲\pi i\, \Sigma(\text{باقیمانده‌های تابع } f(z)\, e^{iaz} \text{ در قطبهای این تابع که در نیم صفحه بالایی صفحه مختلط واقعند.})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iax}\, dx = ۲\pi i \sum_{y>0} Res\, f(z)\, e^{iaz}$$

از طرفی اگر رابطه اولر را برای e^{iax} بنویسیم داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, (\cos ax + i\sin ax)\, dx = ۲\pi i \sum_{y>0} Res\, f(z)\, e^{iaz}$$

و یا می‌توان نوشت:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax\, dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax\, dx = ۲\pi i\ \{Re\ [\sum_{y>0} Res\, f(z)\, e^{iaz}] + i\ Im\ [\sum_{y>0} Res\, f(z)\, e^{iaz}]\}$$

لذا با مساوی قراردادن قسمتهای حقیقی و موهومی در تساوی بالا داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax\, dx = (-۲\pi)\ Im\ [\sum_{y>0} Res\, f(z)\, e^{iaz}] \qquad \text{(۱۹-۶ الف)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax\, dx = ۲\pi Re\ [\sum_{y>0} Res\, f(z)\, e^{iaz}] \qquad \text{(۱۹-۶ ب)}$$

انتگرال زیر را حل کنید.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^2}\, dx$$

حل: چون در تابع حقیقی و گویای $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ درجهٔ مخرج دومرتبه از درجهٔ صورت بیشتر است و مخرج ریشهٔ حقیقی ندارد، لذا از رابطهٔ (۱۹-۶ الف) می‌توان استفاده کرد. ابتدا قطبهای تابع $f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$ را می‌یابیم:

$$1 + z^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = i\,;\ m = 1 \\ z = -i\,;\ m = 1 \end{cases}$$

چون قطب $z = i$ در نیمهٔ بالای صفحهٔ مختلط واقع است لذا باقیماندهٔ تابع $f(z)\, e^{iaz}$ را در $z = i$ محاسبه می‌کنیم.

$$\underset{z=i}{Res}\, f(z)\, e^{iaz} = \lim_{z\to i} \frac{e^{iaz}}{[1 + z^2]'} = \lim_{z\to i} \frac{e^{iaz}}{2z} = \frac{e^{-a}}{2i} = -\frac{ie^{-a}}{2}$$

از طرفی:
$$Im\left[\sum_{y>0} Res\ f(z)\, e^{iaz}\right] = Im\left[\frac{-ie^{-a}}{۲}\right] = \frac{-e^{-a}}{۲}$$

و با استفادهٔ از رابطهٔ (۱۹-۶ الف) داریم:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{۱+x^{۲}}\,dx = (-۲\pi)\, Im\left[\sum_{y>0} Res\ f(z)\, e^{iaz}\right] = (-۲\pi)\left(-\frac{e^{-a}}{۲}\right) = \pi e^{-a}$$

تمرین: با استفاده از مسئله قبل نشان دهید:
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{۱+x^{۲}}\,dx = 0$$

مسئلهٔ ۳۷-۶: مقدار انتگرال ناسره $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ۲x}{x^{۲}+۱}\,dx$ برابر است با: (کنکور کارشناسی ارشد مهندسی برق ۷۰-۶۹)

(الف) $\frac{\pi}{e^{۲}}$ (ب) π (ج) $\frac{\pi}{۲e^{۲}}$ (د) $-\pi$

حل: با استفاده از نتیجهٔ مسئله ۳۴-۶ داریم:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ۲x}{x^{۲}+۱}\,dx = \pi e^{-۲} = \frac{\pi}{e^{۲}}$$

لذا گزینهٔ (الف) صحیح است.

مسئلهٔ ۳۹-۶: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin ax}{۱ + x^۴}\, dx$$

حل: چون در تابع $f(x) = \frac{x}{۱ + x^۴}$ درجهٔ مخرج حداقل ۲ مرتبه بیشتر از درجهٔ صورت است و مخرج ریشهٔ حقیقی ندارد، لذا می‌توان از رابطهٔ (۱۹-۶ ب) استفاده کرد. ابتدا قطبهای تابع $f(z) = \frac{z}{۱ + z^۴}$ را می‌یابیم:

$$۱ + z^۴ = 0 \Rightarrow \begin{cases} z_۱ = e^{(\pi i/۴)} \; ; \; m = ۱ \\ z_۲ = e^{(۳\pi i/۴)} \; ; \; m = ۱ \\ z_۳ = e^{(-۳\pi i/۴)} \; ; \; m = ۱ \\ z_۴ = e^{-(\pi i/۴)} \; ; \; m = ۱ \end{cases}$$