انتگرال مختلط

کاربرد۱

انتگرال توابعی گویا از $\sin\theta$ و $\cos\theta$

انتگرال زیر را درنظر بگیرید:

$$I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)\, d\theta \qquad (۱۰-۶)$$

که در آن F تابعی حقیقی و گویا از $\sin\theta$ و $\cos\theta$ می‌باشد و فرض بر این‌است‌که در بازهٔ $0 \le \theta \le 2\pi$ متناهی است.

با اختیار $z = e^{i\theta}$ داریم:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

یعنی می‌توان تابع حقیقی و گویای $F(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$ را به تابع مختلط و گویای $F(z)$ تبدیل کرد. از طرفی داریم:

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad \text{و یا:} \qquad dz = ie^{i\theta}\, d\theta$$

لذا انتگرال (۱۰-۶) را می‌توان به انتگرال (۱۱-۶) تبدیل کرد:

$$I = \int_c \frac{f(z)}{iz}\, dz \qquad (۶-۱۱)$$

و c در آن دایرهٔ یکهٔ $|z| = 1$ می‌باشد که در جهت پادساعتگرد پیموده می‌شود. حال انتگرال (۱۱-۶) را می‌توان با استفاده از تئوری باقیمانده حل کرد.

با استفاده از روش باقیمانده ثابت کنید:

$$\int_0^{۲\pi} \frac{d\theta}{۲ + \cos\theta} = \frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{۲}\,;\ 0 \le \theta \le ۲\pi$$

با فرض $z = e^{i\theta}$ داریم:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{۱}{۲}\left(z + \frac{۱}{z}\right) \\ dz = ie^{i\theta}\, d\theta = iz\, d\theta \end{cases}$$

$$\int_0^{۲\theta} \frac{d\theta}{۲+\cos\theta} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{۲ + \frac{۱}{۲}\left(z + \frac{۱}{z}\right)} = \frac{۲}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^{۲} + ۴z + ۱}$$

نقاط نامعین را یافته و ضمن تعیین مرتبهٔ آنها داخل یا خارج‌بودن آنها را از مسیر تعیین می‌کنیم:

$$z^{۲} + ۴z + ۱ = 0 \Rightarrow z = -۲ \pm \sqrt{۴ - ۱} = -۲ \pm \sqrt{۳}$$

$$z = -۲ + \sqrt{۳}\ ,\ m = ۱\ ,\ \text{داخل مسیر}$$

$$z = -۲ - \sqrt{۳}\ ,\ m = ۱\ ,\ \text{خارج مسیر}$$

$$Res\ f(z) = \lim_{z \to -۲+\sqrt{۳}} \frac{۱}{۲z + ۴} = \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$$

$$\frac{۲}{i} \int_{|z|=۱} \frac{dz}{z^{۲}+۴z+۱} = \frac{۲}{i}(۲\pi i)\left(\underset{z=-۲+\sqrt{۳}}{Res} f(z)\right) = \frac{۲}{i}(۲\pi i)\left(\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\right) = \frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}$$

$$\int_0^{۲\pi} \frac{d\theta}{۲ + \cos\theta} = \frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}$$

با استفاده از شیوهٔ باقیمانده، مقدار انتگرال زیر را تعیین کنید.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{k + \cos\theta} \quad (k > ۱)$$

حل: باید تغییر متغیری بدهیم تا حدود انتگرال به صفر و ۲π تبدیل شود.

$$\phi = ۲\theta \Rightarrow d\phi = ۲d\theta$$

$$I = \frac{۱}{۲} \int_0^{۲\pi} \frac{d\phi}{k + \cos\phi}$$

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{۲}, \quad 0 \le \phi \le ۲\pi$$

حال با فرض $e^{i\phi} = z$ داریم: $ie^{i\phi}\, d\phi = dz$ یا $izd\phi = dz$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$I = \frac{۱}{۲} \int_0^{۲\pi} \frac{d\phi}{k+\cos\phi} = \frac{۱}{۲} \int_{|z|=۱} \frac{\frac{dz}{iz}}{k + \frac{۱}{۲}\left(z + \frac{۱}{z}\right)} = \frac{۱}{i} \int_{|z|=۱} \frac{dz}{۲kz + z^{۲} + ۱}$$

$$= \frac{۱}{i} \int_{|z|=۱} \frac{dz}{z^{۲} + ۲kz + ۱}$$

حال نقاط نامعین را یافته و ضمن تعیین مرتبهٔ آنها، داخل یا خارج‌بودن آنها را از مسیر تعیین می‌کنیم.

$$z^۲ + ۲kz + ۱ = 0 \qquad z = -k \pm \sqrt{k^۲ - ۱}$$

$z = -k + \sqrt{k^۲ - ۱}\ ,\ m = ۱$, داخل مسیر

$z = -k - \sqrt{k^۲ - ۱}\ ,\ m = ۱$, خارج مسیر

$$\underset{z=-k+\sqrt{k^۲-۱}}{Res} f(z) = \underset{z\to -k+\sqrt{k^۲-۱}}{limit} \frac{۱}{۲z + ۲k} = \frac{۱}{۲\sqrt{k^۲ - ۱}}$$

$$I = \int_{|z|=۱} \frac{dz}{z^۲ + ۲kz + ۱} = \left(\frac{۱}{i}\right) ۲\pi i \left(\frac{۱}{۲\sqrt{k^۲ - ۱}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{k^۲ - ۱}}$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{k + \cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{k^۲ - ۱}} \qquad (k > ۱)$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{26 - 10\cos 2\theta}\, d\theta$$

حل: می‌دانیم:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4}$$

$$\cos 2\theta = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}$$

حال با فرض $e^{i\theta} = z$ داریم:

$$\cos^2\theta = \frac{z^2 + 1/z^2 + 2}{4}$$

$$\cos 2\theta = \frac{z^2 + 1/z^2}{4}$$

2

$$ie^{i\theta}\, d\theta = dz \quad \text{یا} \quad d\theta = \frac{dz}{iz},\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

خواهیم داشت:

$$I = \int_0^{۲\pi} \frac{\cos^۲\theta}{۲۶ - ۱۰\cos ۲\theta}\, d\theta = \int_{|z|=۱} \frac{\dfrac{z^۲ + ۱/z^۲ + ۲}{۴}}{۲۶ - ۱۰\left(\dfrac{z^۲ + ۱/z^۲}{۲}\right)} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{۱}{i} \int_{|z|=۱} \frac{z^۴ + ۲z^۲ + ۱}{z \,.\, ۴z^۲ \left(۲۶ - ۵z^۲ - \dfrac{۵}{z^۲}\right)}\, dz = \frac{۱}{i} \int_{|z|=۱} \frac{(z^۲ + ۱)^۲}{۴z\,(۲۶z^۲ - ۵z^۴ - ۵)}\, dz$$

$$= \frac{-۱}{۲۰i} \int_{|z|=۱} \frac{(z^۲ + ۱)^۲}{z\,(z^۴ - \frac{۲۶}{۵} z^۲ + ۱)}\, dz = \frac{-۱}{۲۰i} \int_{|z|=۱} \frac{(z^۲ + ۱)^۲}{z\left(z^۲ - \dfrac{۱}{۵}\right)(z^۲ - ۵)}\, dz$$

حال نقاط نامعین را یافته و ضمن تعیین مرتبهٔ آنها، داخل یا خارج از مسیربودن آنها را تعیین می‌کنیم:

$$z\left(z^{۲}-\frac{۱}{۵}\right)(z^{۲}-۵)=0$$

$$\begin{cases} z=0 \ , \ m=۱ \ , \ \text{داخل مسیر} \\[2ex] z^{۲}-\frac{۱}{۵}=0 \Rightarrow \quad z=\frac{\sqrt{۵}}{۵} \ , \quad m=۱ \ \text{داخل مسیر} \\[2ex] \qquad\qquad\qquad\quad z=\frac{-\sqrt{۵}}{۵} \ , \quad m=۱ \ \text{داخل مسیر} \\[2ex] z^{۲}-\frac{۱}{۵}=0 \Rightarrow \quad z=\sqrt{۵} \ , \quad m=۱ \ \text{خارج مسیر} \\[2ex] \qquad\qquad\qquad\quad z=-\sqrt{۵} \ , \quad m=۱ \ \text{خارج مسیر} \end{cases}$$

$$\underset{z=0}{Res}\, f(z) = \underset{z \to ۰}{limit} \frac{(z^۲ + ۱)^۲}{\left(z^۵ - \frac{۲۶}{۵} z^۳ + z\right)'} = \underset{z \to ۰}{limit} \frac{(z^۲ + ۱)^۲}{۵z^۴ - \frac{۷۸}{۵} z^۲ + ۱} = ۱$$

$$\underset{z=\frac{-\sqrt{۵}}{۵}}{Res} f(z) = \underset{z \to \frac{\sqrt{۵}}{۵}}{limit} \frac{(z^۲ + ۱)^۲}{۵z^۴ - ۷۸/۵\, z^۲ + ۱} = \frac{-۳}{۴}$$

$$\underset{z=\frac{\sqrt{۵}}{۵}}{Res} f(z) = \underset{z \to \frac{\sqrt{۵}}{۵}}{limit} \frac{(z^۲ + ۱)^۲}{۵z^۴ - ۷۸/۵\, z^۲ + ۱} = \frac{-۳}{۴}$$

حال داریم:

$$I = -\frac{۱}{۲۰i} \int_{|z|=۱} \frac{(z^۲ + ۱)^۲}{z\left(z^۲ - \frac{۱}{۵}\right)(z^۲ - ۵)} = -\frac{۱}{۲۰i} \left[۲\pi i \left(۱ - \frac{۳}{۴} - \frac{۳}{۴} \right) \right] = \frac{\pi}{۲۰}$$