انتگرال مختلط

قضیه باقیمانده

باقیمانده

می‌دانیم اگر تابع تحلیلی $f(z)$ در نقطه $z = a$ دارای یک تکین مجزا باشد می‌توان آن را به‌وسیلهٔ سری لورنت نمایش داد. داریم:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \frac{a_1}{z-a} + \frac{a_2}{(z-a)^2} + \dots$$

به‌طوریکه این سری در دامنهٔ $0 < |z-a| < R$ که در آن R فاصلهٔ a تا نزدیکترین نقطه تکین دیگر $f(z)$ است، همگرا می‌باشد. از طرفی با توجه به رابطه (۹-۵) ضریب a_1 را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)\, dz$$

$$\int_c f(z)\, dz = 2\pi i\, a_1$$

که انتگرال‌گیری اخیر در جهت پادساعتگرد و روی مسیر سادهٔ بسته c که در دامنه $0 < |z-a| < R$ واقع است و نقطه $z = a$ را دربرمی‌گیرد، انجام می‌شود. ضریب a_1 که در رابطهٔ (۲-۶) نقش اساسی را ایفا می‌کند، باقیمانده $f(z)$ در $z = a$ نامیده می‌شود و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$a_1 = \underset{z=a}{Res}\, f(z)$$

اگر $f(z)$ در نقطه $a = z$ یک قطب ساده (قطب مرتبهٔ یک) باشد، داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = a_1 = \operatorname*{limit}_{z \to a} (z - a) f(z)$$

در حالت خاص اگر $a = z$ یک قطب سادهٔ $f(z)$ باشد و داشته باشیم:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

به‌طوریکه هر کدام از توابع $p(z)$ و $q(z)$ در $a = z$ تحلیلی باشند و داشته باشیم $p(a) \neq 0$ ، $q'(a) \neq 0$ و $q(a) = 0$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=a} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

باقیمانده تابع $f(z) = \dfrac{z}{(z-۱)(z+۱)^۲}$ در نقطه $z = ۱$ برابر است با: (کارشناسی ارشد پلیمر ۷۴-۷۳)

الف) $-\dfrac{۱}{۴}$ ب) $\dfrac{۱}{۴}$ ج) $\dfrac{۱}{۲}$ د) $-\dfrac{۱}{۲}$

حل: $z = ۱$ یک قطب سادهٔ تابع است لذا با استفاده از رابطه (۴-۶) داریم:

$$\underset{z=۱}{Res}\, f(z) = \underset{z\to ۱}{limit}\, (z-۱)\cdot\frac{z}{(z-۱)(z+۱)^۲} = \underset{z\to ۱}{limit}\, \frac{z}{(z+۱)^۲} = \frac{۱}{۴}$$

لذا گزینهٔ (ب) صحیح است.

باقیمانده‌های تابع $f(z) = \dfrac{۴ - ۳z}{z^۲ - z}$ را حول قطبهایش بیابید.

حل: این تابع دارای دو قطب سادهٔ $z = 0$ و $z = ۱$ می‌باشد،

$$\underset{z=0}{Res}\, f(z) = \left[\frac{۴ - ۳z}{۲z - ۱}\right]_{z=0} = -۴$$

$$\underset{z=1}{Res}\, f(z) = \left[\frac{۴ - ۳z}{۲z - ۱}\right]_{z=۱} = ۱$$

باقیمانده (*Residue*) تابع $\dfrac{z^{۲}}{(z-۲)(z^{۲}+۱)}$ در نقطه i برابر است با: (کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک ۷۵-۷۴).

الف) $\dfrac{۴}{۵}$ ب) $\dfrac{۱-۲i}{۱۰}$ ج) $\dfrac{۱+۲i}{۱۰}$ د) $\dfrac{۲i-۱}{۱۰}$

حل: چون $z = i$ یک قطب ساده تابع است و شرایط صحت رابطه (۵-۶) برقرارند لذا داریم:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=i} = \frac{z^{۲}}{(z-۲)(z^{۲}+۱)} = \left[\frac{z^{۲}}{۳z^{۲}-۴z+۱}\right]_{z=i} = \frac{i^{۲}}{۳i^{۲}-۴i+۱}$$

$$= \frac{-۱}{-۲-۴i} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱+۲i} = \frac{۱-۲i}{۱۰}$$

لذا گزینه (ب) صحیح است.

در صورتی‌که $z = a$ قطب مرتبه m تابع تحلیلی $f(z)$ باشد آنگاه باقیمانده $f(z)$ در $z = a$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\underset{z=a}{Res}\, f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right] \right\}$$

در این جا بسط سری لورنت تابع $f(z)$ را به صورت ذیل می‌نویسیم:

$$f(z) = \frac{c_m}{(z-a)^m} + \frac{c_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \frac{c_1}{(z-a)} + b_0 + b_1 (z-a) + \dots$$

باقیماندهٔ تابع $f(z) = \dfrac{z}{(z-۱)(z+۱)^۲}$ در نقطه $z = -۱$ برابر است با: (کارشناسی ارشد پلیمر

(الف) $\dfrac{۱}{۴}$ (ب) $-\dfrac{۱}{۲}$ (ج) $-\dfrac{۱}{۴}$ (د) $\dfrac{۱}{۲}$

حل: چون $z = -۱$ قطب مرتبهٔ دوّم تابع است با استفاده از رابطه (۶-۶) داریم:

$$\underset{z=-۱}{Res}\, f(z) = \frac{۱}{۱!} \underset{z \to -۱}{limit} \left[\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-۱}\right)\right] = \underset{z \to -۱}{limit} \frac{-۱}{(z-۱)} = -\frac{۱}{۴}$$

لذا گزینه (ج) صحیح است.

باقیماندهٔ تابع $\frac{۱}{z(z+۲)^۳}$ در نقطهٔ $z = -۲$ برابر است با: (کنکور کارشناسی ارشد مکانیک ۷۵-۷۴)

(الف) $\frac{-۱}{۴}$ (ب) $-\frac{۱}{۸}$ (ج) $\frac{۱}{۴}$ (د) $\frac{۱}{۸}$

حل: چون $z = -۲$ قطب مرتبه سوّم تابع است با استفاده از رابطه (۶-۶) داریم:

$$\underset{z=-۲}{Res}\, f(z) = \frac{۱}{(۳-۱)!} \lim_{z\to -۲} \left[\frac{d^۲}{dz^۲} (z+۲)^۳ \cdot \frac{۱}{z(z+۲)^۳}\right]$$

$$= \frac{۱}{۲!} \lim_{z\to -۲} \left(\frac{۲}{z^۳}\right) = \frac{-۱}{۸}$$

لذا گزینه (ب) صحیح است.

باقیمانده تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z^۲}$ را در $z = 0$ بیابید.

حل: می‌دانیم $z = 0$ قطب تابع است. برای تعیین مرتبهٔ آن، $\underset{z\to 0}{limit}\ (z - 0)^m f(z)$ را به‌ازای $m = ۱, ۲, ...$ محاسبه نموده و مقدار m که به‌ازای آن برای اوّلین بار حد فوق متناهی می‌شود را مرتبهٔ قطب درنظر می‌گیریم. داریم:

$$(I)\ \underset{z\to ۰}{limit}\ z \times \frac{\sin z}{z^۲} = \underset{z\to ۰}{limit}\ \frac{\sin z}{z} = ۱$$

لذا $m = ۱$ مرتبهٔ $z = 0$ در تابع $f(z) = \frac{\sin z}{z^۲}$ می‌باشد ازاین‌رو بااستفاده از رابطهٔ (۴-۶) داریم:

$$\underset{z\to 0}{Res}\ f(z) = \underset{z\to ۰}{limit}\ z \cdot \frac{\sin z}{z^۲} = ۱$$

باقی‌ماندهٔ تابع $f(z) = \frac{1+z}{1-\cos z}$ را در $z = 0$ به‌دست آورید.

حل: $z = 0$ قطب تابع $f(z)$ می‌باشد. برای تعیین مرتبهٔ آن مانند مسئله ۶-۶ عمل می‌کنیم:

$$\text{(I)}\ \lim_{z\to 0} z\,\frac{1+z}{1-\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{z+z^2}{1-\cos z} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{هوپیتال}} \lim_{z\to 0} \frac{1+2z}{-\sin z} = \text{مقدار نامتناهی}$$

$$\text{(II)}\ \lim_{z\to 0} z^2\,\frac{1+z}{1-\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2+z^3}{1-\cos z} = \frac{0}{0}$$

$$\text{هوپیتال} \longrightarrow \lim_{z\to 0} \frac{2z+3z^2}{\sin z} = \frac{0}{0}$$

$$\text{هوپیتال} \longrightarrow \lim_{z\to 0} \frac{2+6z}{\cos z} = 2$$

انتگرال مختلط

قضیه باقیمانده
و محاسبه
انتگرال

قضیه (۱-۶) (قضیهٔ باقیمانده): اگر تابع $f(z)$ در داخل و روی مسیر بستهٔ سادهٔ c بجز در مقدار متناهی از نقاط تکین z_1 و z_2 و... و z_n که در داخل c واقعند، تحلیلی باشد، آنگاه:

$$\int_c f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

مقدار انتگرال $I = \int_{c} \frac{3z}{3z - 1} dz$ به کمک قضیهٔ باقیمانده در حالتی که c دایرهٔ یکه است برابر است با:
(کنکور کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک و مهندسی پزشکی ۷۶-۷۵).

(الف) $\frac{2\pi i}{3}$ (ب) πi (ج) $\frac{4\pi i}{3}$ (د) $2\pi i$

حل: نقطهٔ تکین $z = \frac{1}{3}$ که قطب تابع $f(z) = \frac{3z}{3z - 1}$ می‌باشد در داخل مسیر $|z| = 1$ قرار دارد لذا با استفاده از قضیهٔ باقیمانده داریم:

$$\underset{z=\frac{1}{3}}{Res}\, f(z) = \underset{z\to\frac{1}{3}}{limit} \frac{3z}{3} = \frac{1}{3}$$

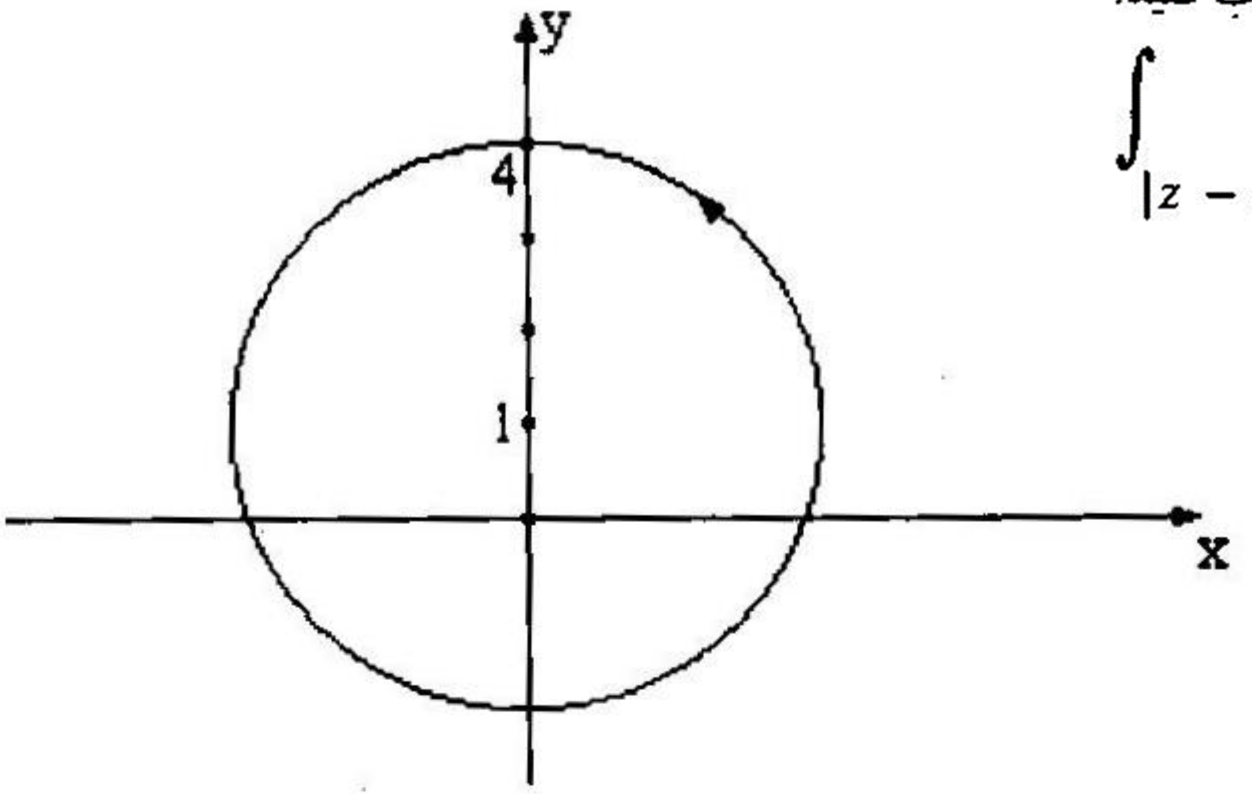
و خواهیم داشت:

$$I = 2\pi i \left(\underset{z=\frac{1}{3}}{Res}\, f(z)\right) = 2\pi i \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi i}{3}$$

لذا گزینهٔ (الف) صحیح است.

با استفاده از روش باقیمانده انتگرال زیر را حساب کنید:

$$\int_{|z-i|=۳} \frac{۳z^۲+۲z-۴}{z^۳-۴z}\,dz$$



حال قطبها را یافته و ضمن تعیین مرتبهٔ آنها، داخل یا خارج مسیربودن آنها را نیز تعیین می‌کنیم:

$$z^۳-۴z=0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 \quad ; \quad m=۱ \quad \text{داخل مسیر} \\ z=۲ \quad ; \quad m=۱ \quad \text{داخل مسیر} \\ z=-۲ \quad ; \quad m=۱ \quad \text{داخل مسیر} \end{cases}$$

$$z = 0\,,\ m = ۱\,,\ \underset{z=0}{Res}\, f(z) = \underset{z\to ۰}{limit}\ \frac{۳z^{۲} + ۲z - ۴}{۳z^{۲} - ۴} = ۱$$

$$z = ۲\,,\ m = ۱\,,\ \underset{z=۲}{Res}\, f(z) = \underset{z\to ۲}{limit}\ \frac{۳z^{۲} + ۲z - ۴}{۳z^{۲} - ۴} = \frac{۳}{۲}$$

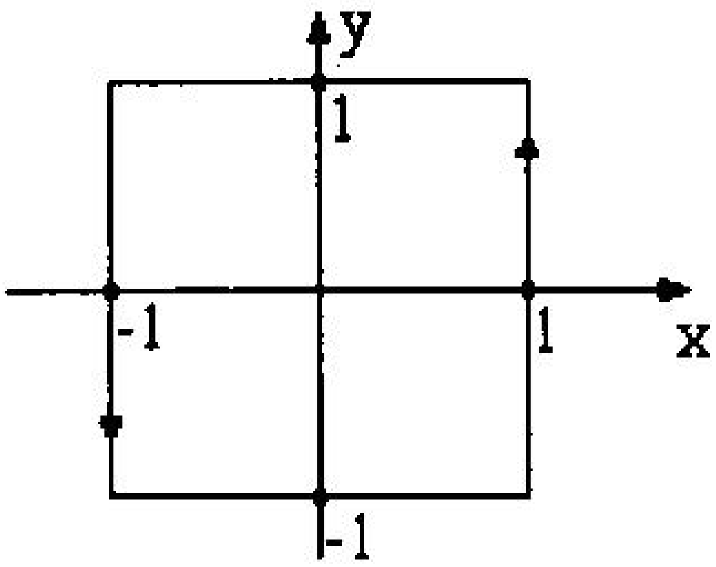
$$z = -۲\,,\ m = ۱\,,\ \underset{z=-۲}{Res}\, f(z) = \underset{z\to -۲}{limit}\ \frac{۳z^{۲} + ۲z - ۴}{۳z^{۲} - ۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\int_{|z-i|=۳} \frac{۳z^{۲} + ۲z - ۴}{۳z^{۲} - ۴z}\, dz = ۲\pi i \sum_{j=۱}^{۳} \underset{z=zj}{Res}\, f(z) = ۲\pi i\left(۱ + \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}\right) = ۶\pi i$$

مسئلهٔ ۱۵-۶: انتگرال $I = \int_c \frac{e^z}{z^۲ (z + ۲)} dz$ بر روی مرز c، مربع $-۱ \le x \le ۱$ و $-۱ \le y \le ۱$ درجهت مثلثاتی عبارت‌است از: (کنکور کارشناسی ارشد مهندسی برق ۷۱-۷۰).

(الف) 0 (ب) $\frac{\pi i}{۸}$ (ج) $\frac{\pi i}{۴}$ (د) $\frac{\pi i}{۲}$

حل: مسیر را رسم می‌کنیم:



حال قطبها را یافته و ضمن تعیین مرتبهٔ آنها، داخل یا خارج مسیربودن آنها را نیز تحقیق می‌کنیم:

$$z^۲ (z + ۲) = 0$$

$$z = 0 , m = ۲ \quad \text{داخل مسیر}$$

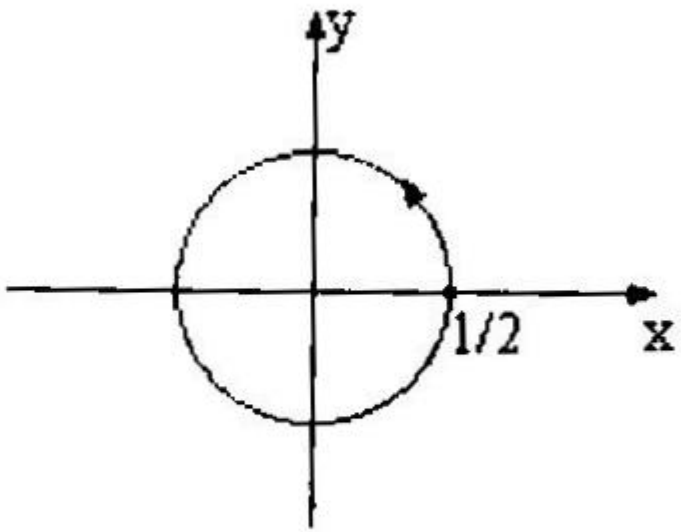
$$z = -۲ , m = ۱ \quad \text{خارج مسیر}$$

$$\underset{z=0}{Res} f(z) = \frac{۱}{۱!} \lim_{z \to ۰} \left\{ \frac{d}{dz} \frac{z^۲ e^z}{z^۲ (z + ۲)} \right\} = \lim_{z \to ۰} \frac{e^z (z + ۲) - e^z}{(z + ۲)} = \frac{۱}{۴}$$

مسئلهٔ ۱۶-۶: اگر مرز سادهٔ بستهٔ c به‌صورت $|z| = \frac{۱}{۲}$ و در جهت مثبت باشد، آنگاه $\int_c \frac{e^z}{z^۳(z^۲+۱)}dz$ برابر است با: (دکترای اعزام به خارج مهندسی برق و مهندسی پزشکی ۷۲-۷۱).

(الف) $۲\pi i$ (ب) $-\pi i$ (ج) 0 (د) $-۲\pi i$

حل: مسیر را رسم می‌کنیم:



حال قطبها را یافته و ضمن تعیین مرتبهٔ آنها، داخل یا خارج مسیر بودنشان را بررسی می‌کنیم:

$$z^۳(z^۲+۱) = 0$$

$z = 0 \quad ; \quad m = ۳$ داخل مسیر

$z = i \quad ; \quad m = ۱$ خارج مسیر

$z = -i \quad ; \quad m = ۱$ خارج مسیر

$$\underset{z=0}{Res}\, f(z) = \frac{۱}{۲!} \underset{z\to ۰}{limit} \left\{\frac{d^۲}{dz^۲}\left(z^۳ . \frac{e^z}{z^۳(z^۲+۱)}\right)\right\} = -\frac{۱}{۲}$$

لذا:

$$\int_c \frac{e^z}{z^۳(z^۲+۱)}dz = ۲\pi i\left(\underset{z=0}{Res}\, f(z)\right) = ۲\pi i\left(-\frac{۱}{۲}\right) = -\pi i$$

پس گزینهٔ (ب) صحیح است.