حوزهٔ D در صفحهٔ مختلط را یک حوزهٔ همبند ساده[2] می‌گوئیم اگر هر منحنی ساده بسته در D (یعنی هر منحنی بسته در D بدون آنکه خودش را قطع کند) فقط شامل نقاط D باشد. به‌عبارت دیگر اگر منحنی را بتوان در یک نقطه منقبض کرد، ضمن انقباض همواره در D بماند. شکل ۲-۴ حوزهٔ همبند سادهٔ D و منحنی سادهٔ بستهٔ c را در آن نشان می‌دهد.

حوزه‌ای که همبند ساده نباشد یک چند پارچه[3] نامیده می‌شود. شکل ۳-۴ مثالی از این نوع است.

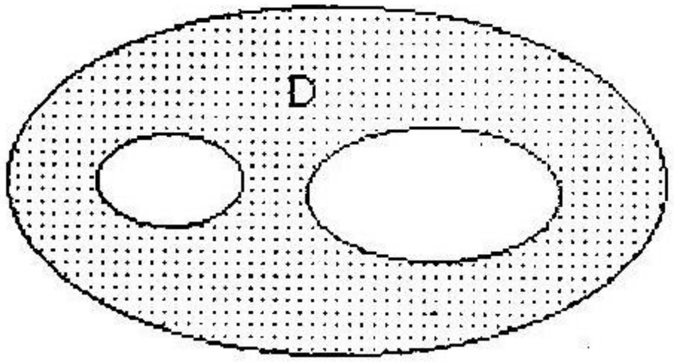
قضیهٔ ۱-۴ (انتگرال کوشی): اگر تابع $f(z)$ در حوزه همبند سادهٔ D تحلیلی باشد، به‌ازای هر مسیر بستهٔ ساده c در حوزهٔ D (شکل ۲-۴) داریم:

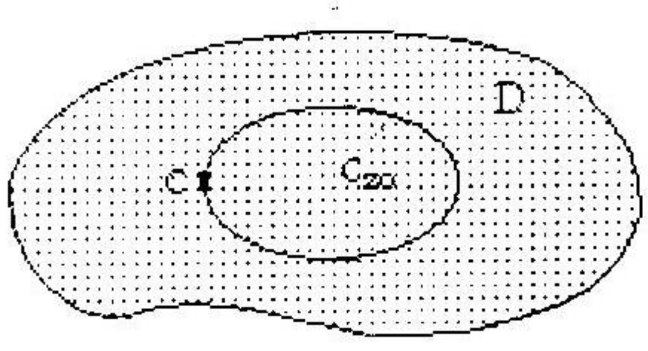
$$\int_c f(z)\ d = 0 \qquad (۴-۹)$$

گاهی اوقات برای نشان‌دادن انتگرال خطی روی مسیر بستهٔ c از نماد $\oint_c$ نیز استفاده می‌کنند. در این صورت رابطهٔ (۹-۴) را می‌توان به شکل زیر نیز بیان کرد:

$$\oint_c f(z)\ dz = 0$$

این قضیه به‌سادگی و با استفاده از تئوری گرین اثبات می‌شود.





حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$\int_{c:|z|=۱} e^{z}\, dz = ?$$

حل: چون تابع $f(z) = e^{z}$ در تمام صفحه مختلط، تحلیلی است. لذا روی هر مسیر بستهٔ ساده‌ای نظیر دایرهٔ واحد $|z|=۱$ مقدار انتگرال خطی آن برابر صفر است. لذا:

$$\int_{|z|=۱} e^{z}\, dz = 0$$

حاصل انتگرال زیر را به‌دست آورید.

$$\int_{|z|=۱}\frac{dz}{z^۲}=?$$

حل: برای حل این انتگرال از قضیه انتگرال کوشی نمی‌توانیم استفاده کنیم. زیرا نقطهٔ $z=0$ که باعث غیرتحلیلی‌شدن $f(z)=\frac{۱}{z^۲}$ است در داخل دایرهٔ واحد $|z|=۱$ قرار دارد، لذا از روش پارامتری استفاده می‌کنیم.

ابتدا مسیر را به‌صورت مقابل پارامتری می‌کنیم:

$$z=e^{i\theta},\ 0\le\theta\le ۲\pi$$

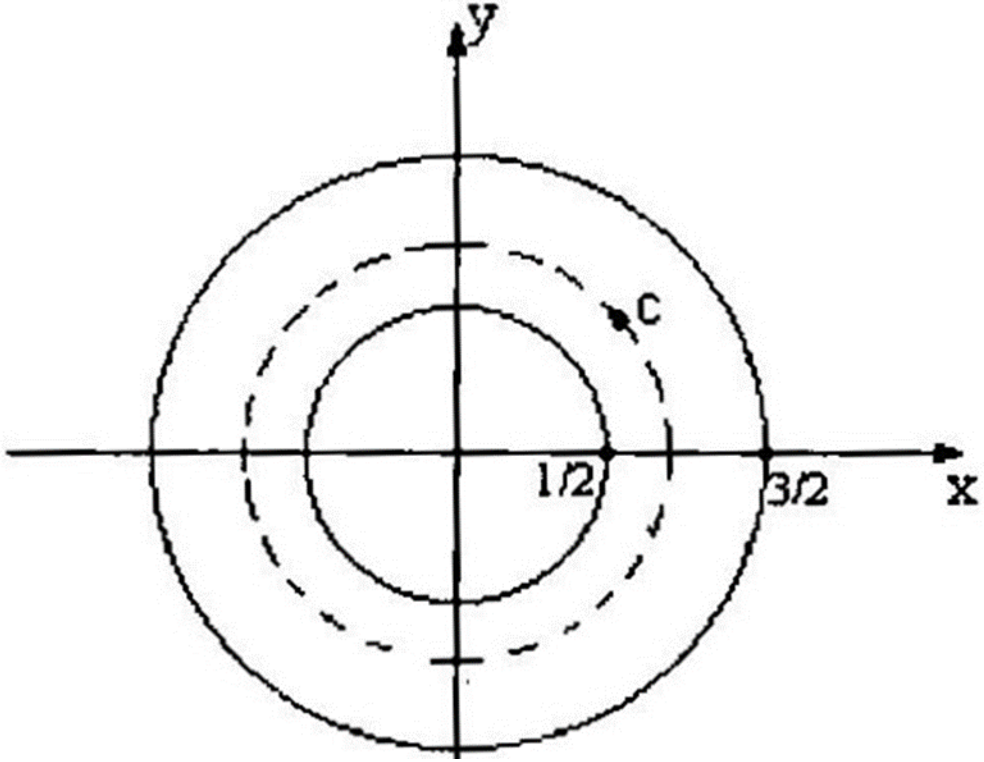
$$dz=ie^{i\theta}\,d\theta$$

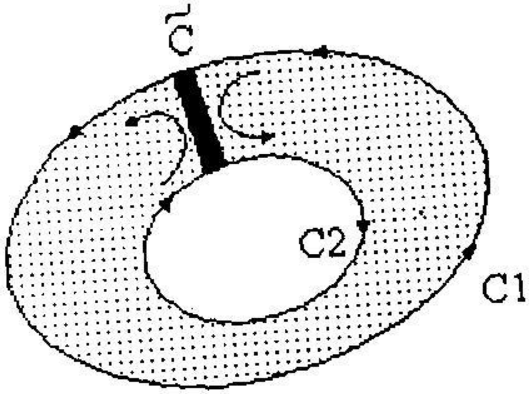
$$\int_{|z|=۱}\frac{dz}{z^۲}=\int_0^{۲\pi}\frac{ie^{i\theta}\,d\theta}{e^{۲i\theta}}=\int_0^{۲\pi}ie^{-i\theta}\,d\theta=\left[-e^{-i\theta}\right]_0^{۲\pi}=۰$$

توجه کنید که صفرشدن $\int_{|z|=۱}\frac{dz}{z^۲}$ هیچ ارتباطی با قضیه انتگرال کوشی ندارد.

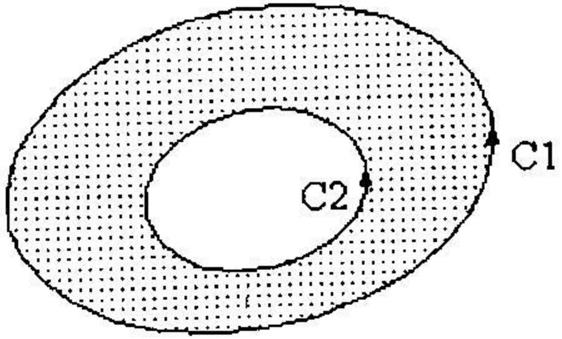
آیا برای محاسبهٔ انتگرال زیر از قضیه انتگرال کوشی می‌توان استفاده کرد؟ مسـیر c ، دایـرهٔ واحد $|z| = ۱$ با جهت مثلثاتی است که در ناحیه $\frac{۱}{۲} < |z| < \frac{۳}{۲}$ واقع شده است.

حل: مسیر c و ناحیه $\frac{۱}{۲} < |z| < \frac{۳}{۲}$ را در شکل زیر مشاهده کنید.

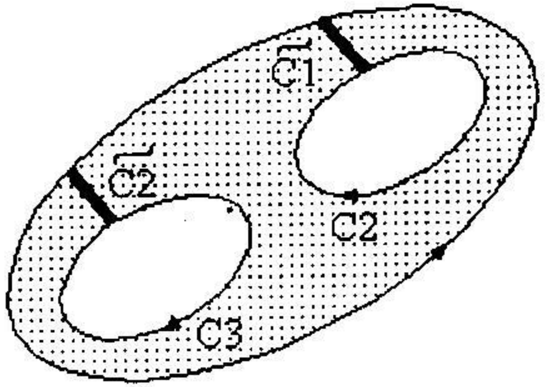




شکل ۴-۸



شکل ۴-۹



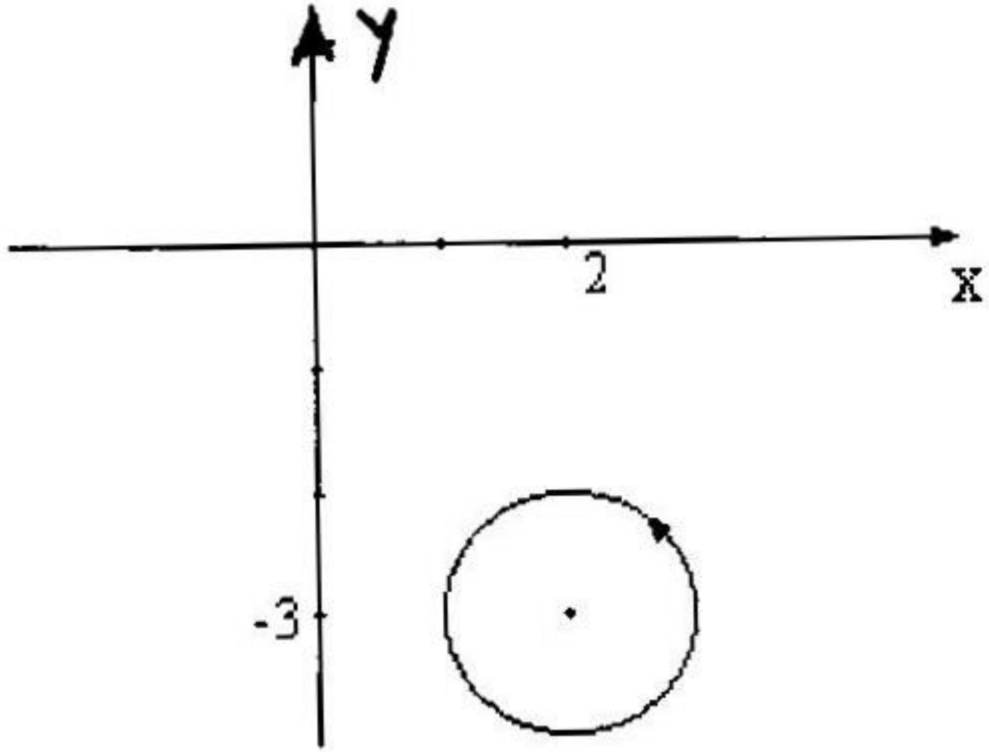
شکل ۴-۱۰

مسئلهٔ ۱۹-۴: مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z-2+3i|=1} \frac{\sin z}{z+3i}\,dz = ?$$

حل: (الف) مسیر را رسم می‌کنیم: $|z-2+3i|=1$ نمایانگر دایره‌ای به مرکز $2-3i$ و شعاع ۱ است.

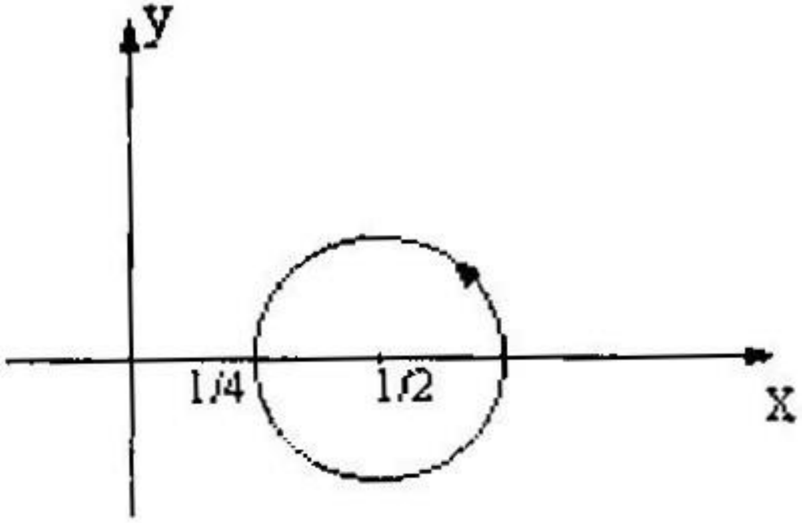
می‌بینیم که نقطه $z_0 = 3i$ که باعث غیرتحلیلی‌بودن $\frac{\sin z}{z+3i}$ است در خارج از مسیر قرار دارد. لذا بنابر قضیه انتگرال کوشی چون تابع $\frac{\sin z}{z+3i}$ در داخل و روی مسیر $|z-2+3i|=1$ تحلیلی است. لذا:



$$\int_{|z-2+3i|} \frac{\sin z}{z+3i}\,dz = 0$$

مسئلهٔ ۲۰-۴: مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z-\frac{۱}{۲}|=\frac{۱}{۴}} \frac{۲z+۱}{z^{۲}+z}\,dz = ?$$



حل: (الف) مسیر را رسم می‌کنیم:

(ج) ریشه‌های مخرج را که تابع کسری به‌ازای آنها تحلیلی نیست به‌دست می‌آوریم:

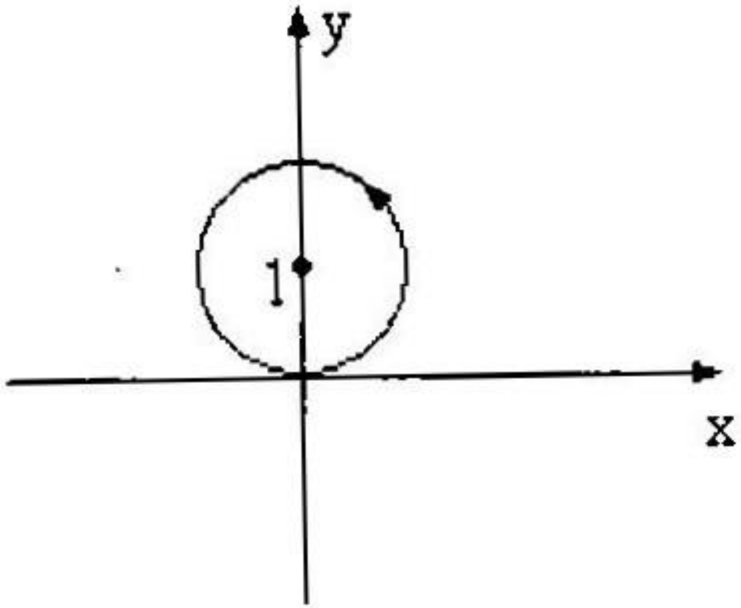
$$z^{۲}+z=0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 \\ z=-۱ \end{cases}$$

می‌بینیم که هیچیک از این نقاط در مسیر نیست لذا بنابر قضیه انتگرال کوشی چون تابع $\frac{۲z+۱}{z^{۲}+z}$ در مسیر $|z-\frac{۱}{۲}|=\frac{۱}{۴}$ تحلیلی است لذا:

$$\int_{|z-\frac{۱}{۲}|=\frac{۱}{۴}} \frac{۲z+۱}{z^{۲}+z} = 0$$

مسئلهٔ ۲۱-۴: مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z-i|=۱} \frac{z^۲ + ۱}{z^۲ - ۱}\, dz = ?$$



حل: مسیر را رسم می‌کنیم:

حال ریشه‌های مخرج را محاسبه می‌کنیم

$$z^۲ - ۱ = 0 \Rightarrow z = \pm ۱$$

می‌بینیم که هیچیک از این دو ریشه نیستند لذا بنابر قضیه انتگرال کوشی تابع $\frac{z^۲ + ۱}{z^۲ - ۱}$ در مسیر $|z - i| = ۱$ تحلیلی است و داریم:

فرمول انتگرال کوشی

مهمترین پیامد قضیهٔ انتگرال کوشی، فرمول انتگرال کوشی می‌باشد که در این قسمت به آن می‌پردازیم.

قضیه (۲-۴)، (فرمول انتگرال کوشی): فرض کنید که $f(z)$ در حوزهٔ همبند سادهٔ D تحلیلی باشد، در این صورت برای هر z_0 متعلق به D و برای هر مسیر سادهٔ c در D که شامل z_0 نیز بشود (شکل ۱۱-۴) داریم:

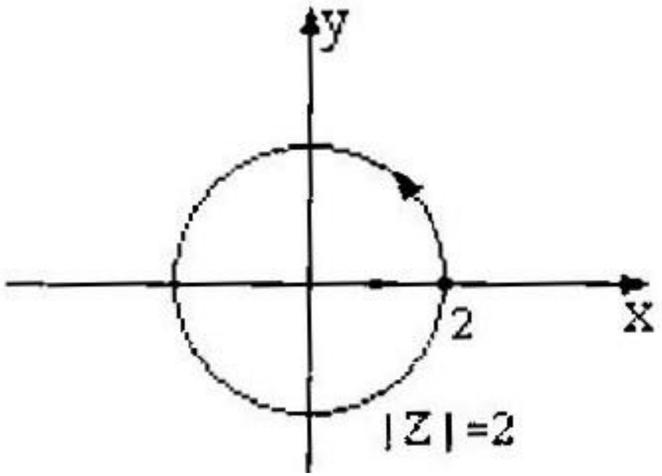
$$\int_c \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = ۲\pi i f(z)$$

جهت مثبت انتگرال‌گیری، جهت پادساعتگرد فرض می‌شود.

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{\substack{|z|=۲ \\ \text{پادساعتگرد}}} \frac{e^z}{z}\, dz = ?$$

حل: مسیر را رسم می‌کنیم:



می‌بینیم که نقطهٔ $z = 0$ که باعث غیرتحلیلی‌بودن تابع $\frac{e^z}{z}$ است در داخل مسیر قرار دارد. ازاین‌رو با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$f(z) = e^z \ ; \ z_0 = 0$$

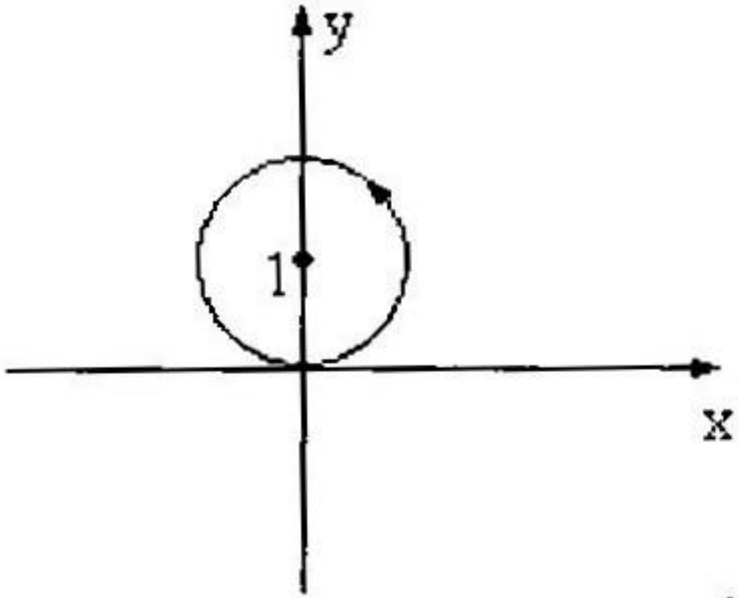
لذا:

$$\int_c \frac{e^z}{z}\, dz = ۲\pi i(e^0) = ۲\pi i$$

مقدار انتگرال زیر را به‌دست آورید. اگر c دایره‌ای به شعاع واحد و به مرکز (الف) $z = i$ و (ب) $z = -i$ باشد.

$$\int_c \frac{e^z}{z^۲ + ۱}\, dz = ?$$

حل: (الف) مسیر را رسم می‌کنیم:



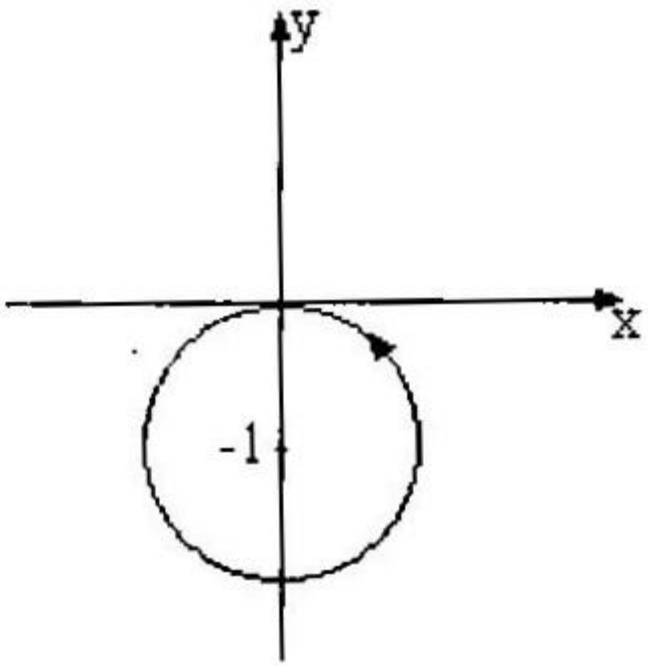
دراین‌حالت تابع زیر انتگرال را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\int_c \frac{e^z}{z+i} \cdot \frac{dz}{z-i} = \int \frac{\left(\frac{e^z}{(z+i)}\right)}{z-i}\, dz$$

تابع $f(z) = \frac{e^z}{z + i}$ در مسیر نشان داده شده تحلیلی است و نقطه $z = i$ در این ناحیه قرار دارد. لذا با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$\int_c \frac{\left(\frac{e^z}{z + i}\right)}{z - i} dz = ۲\pi i\left(\frac{e^i}{۲i}\right) = \pi\ (\cos ۱ + i\sin ۱)$$

(ب) مسیر را رسم می‌کنیم:



دراین‌حالت تابع زیر انتگرال را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\int_c \frac{e^z}{z-i}\cdot\frac{dz}{z+i}=\int_c \frac{\left(\frac{e^z}{(z-i)}\right)}{z+i}\,dz$$

تابع $f(z)=\frac{e^z}{z-i}$ در مسیر نشان داده شده، تحلیلی است و نقطه $z=-i$ در این ناحیه قرار دارد. لذا با استفاده از فرمول انتگرال کوشی داریم:

$$\int_c \frac{\left(\frac{e^z}{z-i}\right)}{z+i}\,dz = ۲\pi i\left(\frac{e^{-i}}{-۲i}\right) = -\pi\ (\cos ۱ - i\sin ۱)$$

ادامه انتگرال مختلط

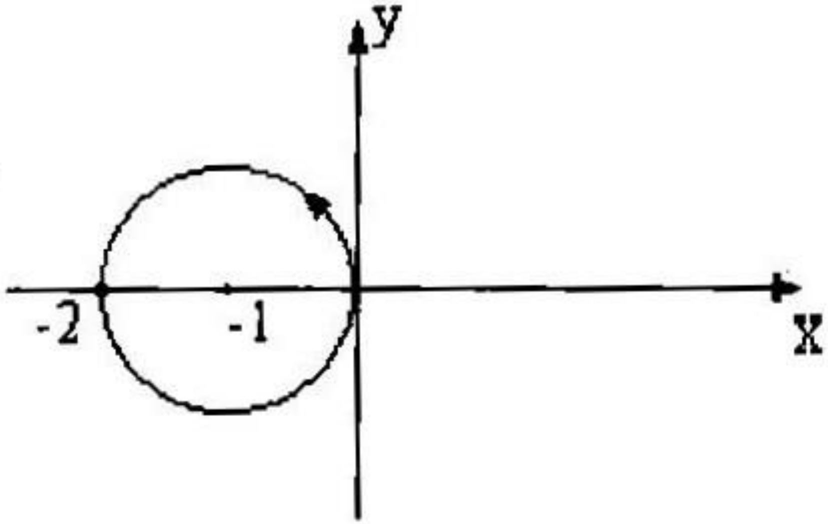
فرمول مشتقات انتگرال کوشی

$$\int \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} = \frac{2\pi i}{(m-1)!} f^{(n-1)}(z_0)$$

مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{1+z^3} = ?$$

حل: مسیر را رسم می‌کنیم:



ریشه‌های مخرج را محاسبه می‌کنیم:

$$1 + z^3 = (1 + z)(z^2 - z + 1) = 0$$

$$\begin{cases} z = -1 \\ z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} \end{cases}$$

می‌بینیم که نقطه $z = -1$ در مسیر صدق می‌کند لذا:

$$\frac{1}{1+z^3} = \frac{1}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{\dfrac{1}{(z^2-z+1)}}{z+1}$$

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{z^3+1} = \int_{|z+1|=1} \frac{\dfrac{1}{z^2-z+1}}{z+1}\, dz = 2\pi i\, f(-1) = 2\pi i \left[\frac{1}{z^2-z+1}\right]_{z_0=-1} = \frac{2\pi i}{3}$$

مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z|=۲} \frac{۲z + ۱}{z^۲ + z}\, dz = ?$$

حل: مسیر را رسم می‌کنیم:

حال ریشه‌های مخرج را به‌دست می‌آوریم:

$$z^۲ + z = 0 \Rightarrow \quad \begin{array}{l} z = 0 \\ z = -۱ \end{array}$$

امّا با استفاده از روشهایی که در این فصل خوانده‌ایم قادر نیستیم که انتگرالی با دو نقطهٔ غیرتحلیلی را حل کنیم لذا از شیوهٔ تفکیک کسرها مدد می‌جوئیم.

$$\frac{۲z + ۱}{z^۲ + z}\, dz = \frac{۲z + ۱}{z\,(z + ۱)} = \frac{A}{z} = \frac{B}{z + ۱} = \frac{(A + B)\, z + A}{z^۲ + z} \Rightarrow \begin{cases} A + B = ۱ \\ A = ۱ \end{cases}$$

$$\frac{2z+1}{z^2+z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}$$

$$\int_{|z|=2}\frac{2z+1}{z^2+z}\,dz=\int_{|z|=2}\frac{1}{z}\,dz+\int_{|z|=2}\frac{1}{z+1}\,dz$$

حال هر کدام از این دو انتگرال را با شیوه فرمول انتگرال کوشی می‌توان حل کرد.

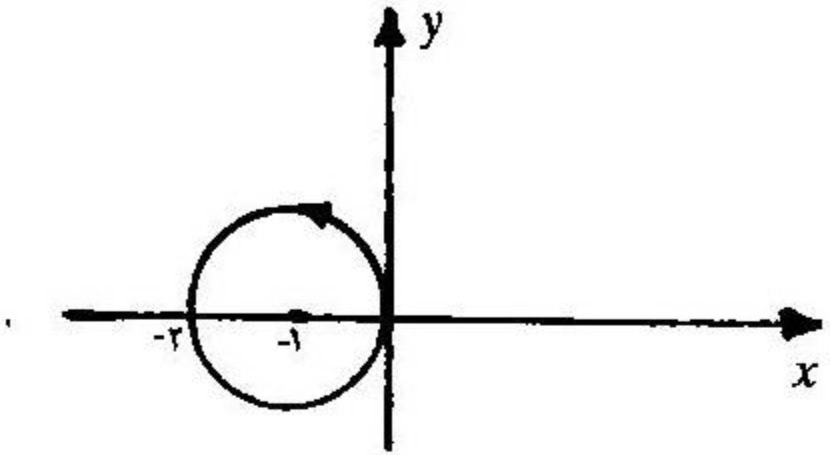
$$\int_{|z|=2}\frac{1}{z}\,dz+\int_{|z|=2}\frac{1}{z+1}\,dz=2\pi i\,(1)_{z=0}+2\pi i\,(1)_{z=-1}=4\pi i$$

$$\int_{|z|=2}\frac{2z+1}{z^2+z}\,dz=4\pi i$$

مطلوب است محاسبه انتگرال

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{z^4 - 1} = ?$$

حل: مسیر را رسم می‌کنیم:



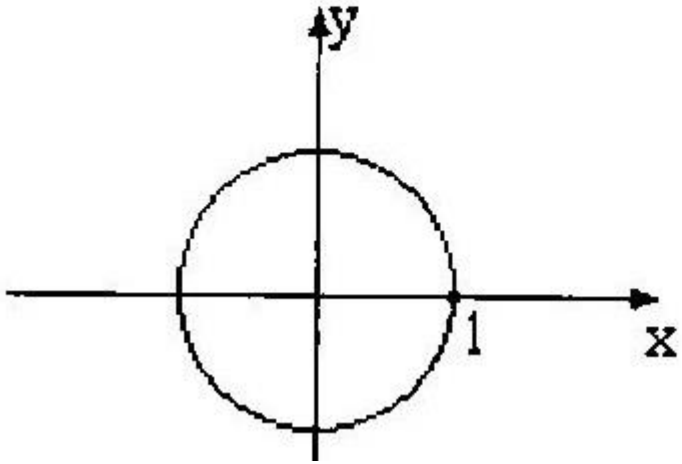
حال ریشه‌های مخرج را رسم می‌کنیم:

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = -1 \\ z = i \\ z = -i \end{cases}$$

ازبین این ریشه‌ها فقط $z = -1$ در مسیر صدق می‌کند لذا:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{z^4-1} dz = \int_{|z+1|=1} \frac{\frac{1}{(z^2+1)(z-1)}}{z+1} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{(z^2+1)(z-1)}\right)_{z=-1} = -\frac{\pi i}{2}$$

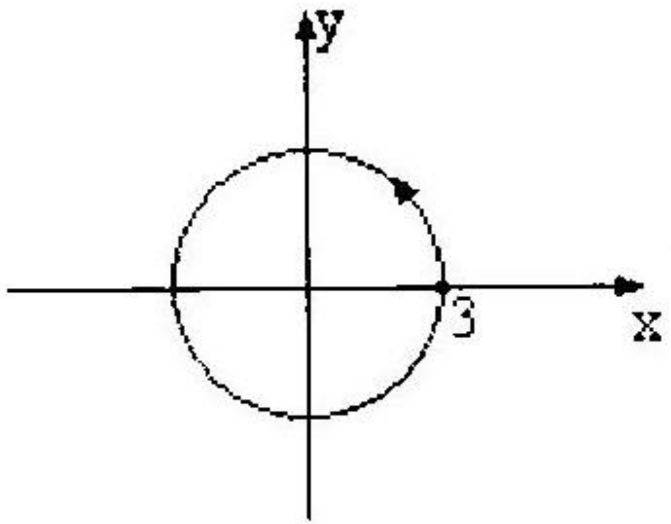
حل: مسیر را رسم می‌کنیم:



چون تابع $f(z) = ۲^{\cos z}$ تحلیلی است و با توجه به اینکه $z_0 = 0$ است از فرمول انتگرال کوشی استفاده کرده و داریم:

$$\int_{|z|=۱} \frac{۲^{\cos z}}{z}\,dz = ۲\pi i\ (۲^{\cos(0)}) = ۴\pi i$$

حل: مسیر را رسم می‌کنیم:



ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$z^{۲}(z^{۲}+۴)=0 \Rightarrow \begin{cases} z=0 \text{ مضاعف} \\ z=۲i \\ z=-۲i \end{cases}$$

هر چهار ریشه در مسیر صدق می‌کند لذا باید از شیوهٔ تفکیک کسر استفاده کنیم:

$$\frac{۱}{z^{۲}(z^{۲}+۴)} = \frac{۱}{z(z+۲i)(z-۲i)} = \frac{Az+B}{z^{۲}} + \frac{C}{z+۲i} + \frac{D}{z-۲i}$$

$$= \frac{(A+D+C)z^{۳}+(B+۲iD-۲ic)z^{۲}+۴Az+۴B}{z^{۲}(z^{۲}+۴)}$$

$$\begin{cases} A+C+D=0 \\ B-۲ic+۲iD=0 \\ ۴A=0 \\ ۴B=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=\frac{۱}{۴} \\ c=-\frac{i}{۱۶} \\ D=\frac{i}{۱۶} \end{cases}$$

$$\frac{1}{z^2(z^2+4)} = \frac{1/4}{z^2} - \frac{i/16}{z+2i} + \frac{i/16}{z-2i}$$

$$\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2(z^2+4)} = \frac{1}{4}\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2} - \frac{i}{16}\int_{|z|=3} \frac{dz}{z+2i} + \frac{i}{16}\int_{|z|=3} \frac{dz}{z-2i}$$

انتگرال اوّل را با استفاده از مشتقات فرمول انتگرال کوشی و دو انتگرال دیگر را با استفاده از فرمول انـتگرال کوشی محاسبه می‌کنیم:

$$= \frac{1}{4}\, 2\pi i\, f'(0) - \frac{i}{16}\, 2\pi i h\,(-2i) + \frac{i}{16}\, 2\pi i\, g(2i)$$

باتوجه به اینکه:

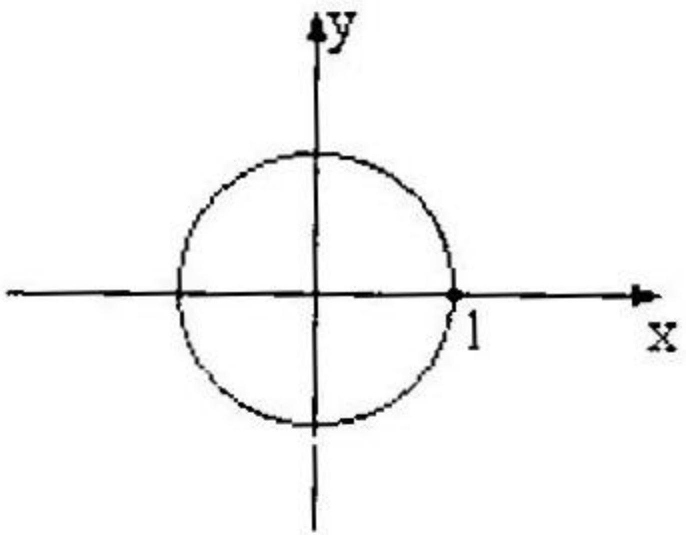
$$f(z) = 1 \Rightarrow f'(z) = 0$$

$$h(z) = 1\,,\quad g(z) = 1 \Rightarrow \text{داریم} \int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2(z^2+4)} = 0$$

مطلوب است محاسبه انتگرال زیر:

$$\int_{|z|=۱} \frac{۲^{\sin z}}{z^۲}\, dz = ?$$

حل: مسیر را رسم می‌کنیم:



مخرج دارای دو ریشه $z = 0$ است که در مسیر واقع هستند، لذا از مشتقات فرمول انتگرال کوشی استفاده می‌کنیم:

$$\int_{|z|=۱} \frac{۲^{\sin z}}{z^۲}\, dz = ۲\pi i\, f'(0)$$ از طرفی $$\Rightarrow\ f(z)=۲^{\sin z}=e^{\sin z\,(\ln ۲)}$$

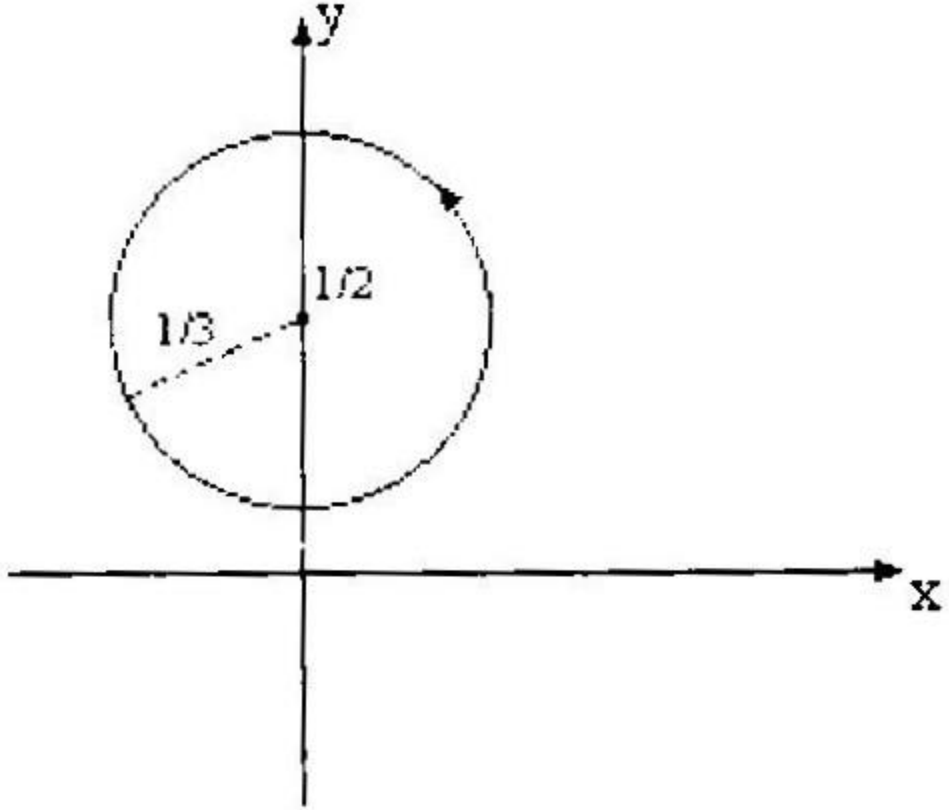
$$f'(z) = [e^{\ln ۲ \sin z}]' = \ln ۲\, \cos z\, e^{\ln ۲ \sin z}$$

$$\int_{|z|=۱} \frac{۲^{\sin z}}{z^۲}\, dz = ۲\pi i\, [\ln ۲ \cos z\, e^{\ln ۲ \sin z}]_{z=0} = ۲\pi i\, \ln ۲$$

مسئلهٔ ۳۸-۴: حاصل $\int_c \frac{ln(۱+z^۲)}{(۲z-i)^۲}dz$، که c منحنی $\frac{۱}{۳} = |z - \frac{i}{۲}|$ در جهت مثبت است، برابر است با: (کنکور کارشناسی ارشد مهندسی برق ۷۴-۷۳).

(الف) $\frac{\pi}{۳}$ (ب) $\frac{۴\pi}{۳}$ (ج) $\frac{-۱۶\pi}{۳}$ (د) $\frac{-۲\pi}{۳}$

حل: ابتدا مسیر را رسم می‌کنیم:



تابع $f(z) = ln\ (۱ + z^۲)$ در مسیر داده شده تحلیلی است. داریم:

$$\oint_c \frac{ln(۱+z^۲)}{(۲z-i)^۲}dz = \frac{۱}{۴}\oint_c \frac{ln(۱+z^۲)}{(z-i/۲)^۲}dz$$

با استفاده از فرمول () و اینکه $f'(z) = \frac{۲z}{۱+z^۲}$ است، داریم:

$$\frac{۱}{۴}\oint_c \frac{ln(۱+z^۲)}{(z-i/۲)^۲}dz = \frac{۱}{۴}\left[۲\pi i\left(\frac{۲z}{۱+z^۲}\right)_{z=i/۲}\right] = -\frac{۲\pi}{۳}$$

گزینهٔ (د) صحیح است.