انتگرال مختلط

۲-۴ انتگرال خطی در صفحه مختلط

برای تعیین انتگرال معین یا انتگرال خطی تابع مختلط $f(z)$ که در آن $z = x + iy$ است، باید منحنی هموار[۲] را تعریف کنیم.

تعریف: منحنی c را در صفحه مختلط می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

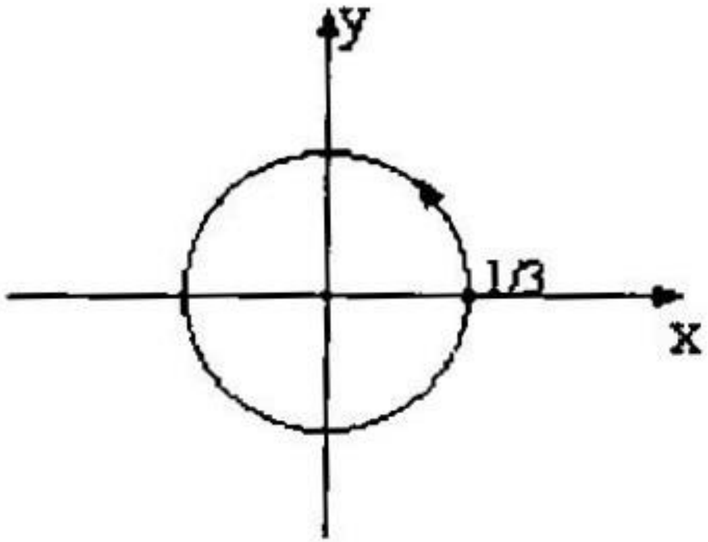
$$z(t) = x(t) + iy(t) \qquad (۴-۱)$$

که در آن t یک پارامتر حقیقی است. اگر t را بین $x(t)$ و $y(t)$ حذف کنیم، معادله دکارتی منحنی به‌صورت $y = f(x)$ یا $f(x,y) = 0$ به‌دست می‌آید. مثلاً تابع: $z(t) = r\cos t + ir\sin t$ همان دایرهٔ $x^2 + y^2 = r^2$ و تابع $z(t) = t + it^2$ نیز سهمی $y = x^2$ است.

جهت مثبت در طول منحنی c را در جهت افزایش پارامتر t اختیار می‌کنیم. فرض کنید که $z(t)$ در رابطه (۴-۱) مشتق‌پذیر باشد و $z'(t)$ پیوسته و در همه جا مخالف صفر باشد. ازاین‌رو منحنی c در هر نقطه‌اش دارای یک مماس منحصر به فرد خواهد بود و یک منحنی هموار نامیده می‌شود.

مسئلهٔ ۱ – ۴: با استفاده از شیوه پارامتری مطلوبست:

$$\int_{|z|=\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{z}\,dz = ?$$



حل: برای حل مسائل بدین روش، باید مراحل ذیل انجام شوند:

(الف) مسیر را رسم می‌کنیم: $|z| = \frac{۱}{۳}$ بیانگر دایره‌ای به مرکز صفر و شعاع $\frac{۱}{۳}$ است. لذا:

(ب) مسیر را پارامتری می‌کنیم. چون مسیر دایره است از معادلهٔ $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ که در آن z_0 مرکز و ρ شعاع دایره است استفاده می‌کنیم.

$$z = z_0 + \rho e^{i\theta} \Rightarrow z = \frac{۱}{۳} e^{i\theta} \quad ; \quad 0 \le \theta \le ۲\pi$$

در این جا θ پارامتر است. جهت مثبت را در جهت افزایش مقدار پارامتر یعنی جهت مثلثاتی اختیار می‌کنیم.

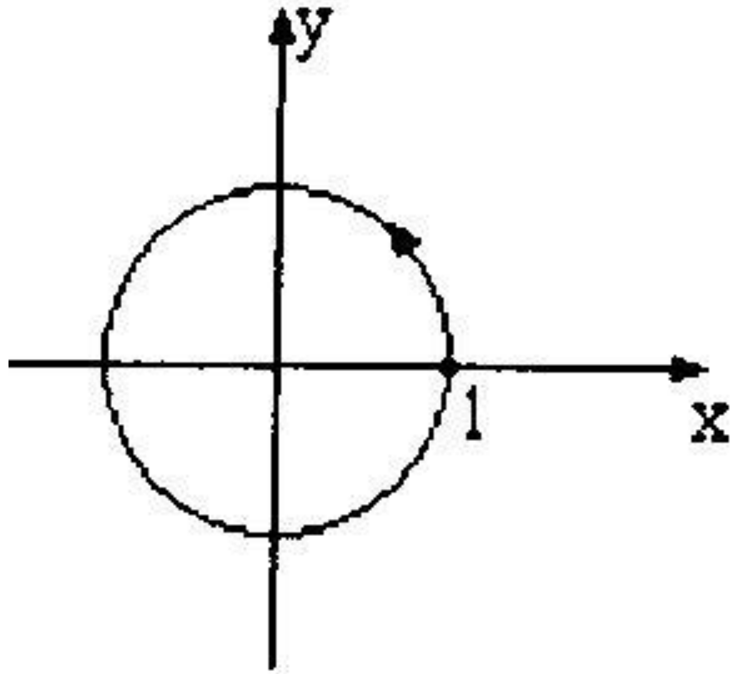
(ج) با استفاده از فرمول پارامتری به‌دست آمده، مقدار dz را محاسبه می‌کنیم:

$$z = \frac{۱}{۳} e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le ۲\pi \Rightarrow dz = \frac{i}{۳} e^{i\theta}\,d\theta$$

(د) از رابطه (۴–۴) استفاده کرده و داریم:

$$\int_{|z|=\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{z}\,dz = \int_0^{۲\pi} \cancel{\frac{۱}{۳}}\,\frac{۱}{e^{i\theta}} \cdot \left(\frac{۱}{۳} e^{i\theta}\,d\theta\right) = \int_0^{۲\pi} i\,d\theta = ۲\pi i$$

مسئلهٔ ۲-۴: با استفاده از روش پارامتری مطلوب است:



حل: (الف)

$$\int_{|z|=1} e^{-z}\,dz = ?$$

(ب)

$$z = z_0 + \rho e^{i\theta} \Rightarrow z = e^{i\theta}\,,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

(ج)

$$dz = ie^{i\theta}\,d\theta$$

$$\int_{|z|=1} e^{-z}\,dz = \int_0^{2\pi} e^{-e^{i\theta}} . \, ie^{i\theta}\,d\theta$$

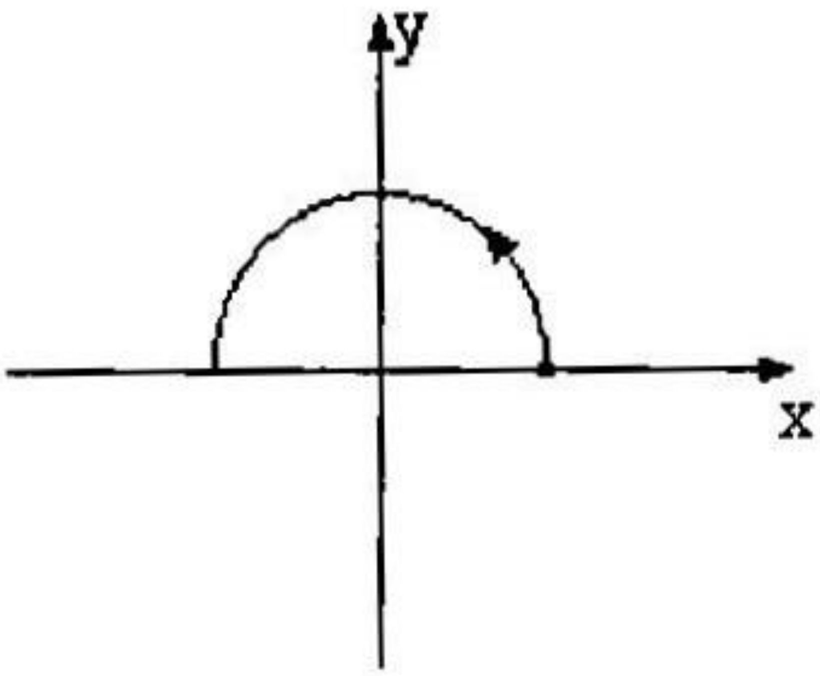
برای حل انتگرال اخیر از شیوهٔ تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$e^{i\theta} = u \Rightarrow ie^{i\theta}\,d\theta = du \Rightarrow \int e^{-e^{i\theta}} . \, ie^{i\theta}\,d\theta = \int e^{-u}\,du = -e^{-u} = -e^{-e^{i\theta}}$$

پس:

$$\int_0^{2\pi} e^{-e^{i\theta}} . \, ie^{i\theta}\,d\theta = \left[e^{-e^{i\theta}}\right]_0^{2\pi} = -[e^{-e^{2\pi i}} - e^{-1}] = -[e^{-1} - e^{-1}] = 0$$

مسئلهٔ ۳–۴: با استفاده از شیوه پارامتری مطلوب است:



$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = ?$$

نیم دایره فوقانی از ۱ $= |z| : c$

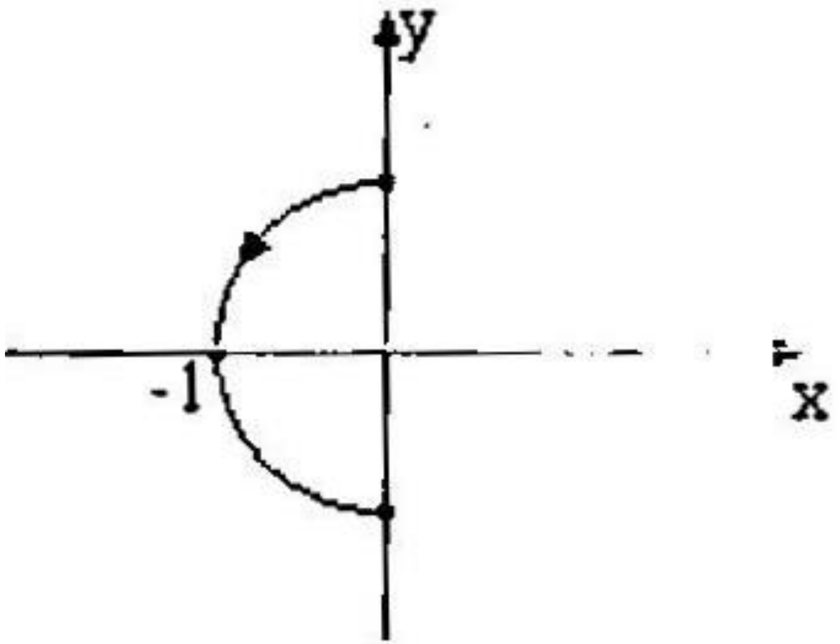
حل: (الف)

(ب) $z = e^{i\theta} \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi$

(ج) $dz = ie^{i\theta}\, d\theta$

(د) $$\int_c \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{\pi} \frac{۱}{\sqrt{e^{i\theta}}} \cdot ie^{i\theta} d\theta = i\int_0^{\pi} e^{\,i\theta/۲}\, d\theta = i\left[\frac{۲}{i}\, e^{i\theta/۲}\right]_0^{\pi} = ۲\left[e^{\pi/۲i} - ۱\right] = ۲\,(i - ۱)$$

مسئلهٔ ۴–۴: با استفاده از شیوه پارامتری مطلوب است :



$$\int |z|\ dz = ?$$

$$c : |z| = 1 \text{ نیم دایرهٔ سمت چپ}$$

حل: (الف)

(ب) $z = e^{i\theta}\ ,\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

(ج) $dz = ie^{i\theta}\ d\theta$

(د) $\int_c |z|\ dz = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |e^{i\theta}|.\ ie^{i\theta}\ d\theta = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\cos\theta + i\sin\theta\ |.\ ie^{i\theta}\ d\theta$

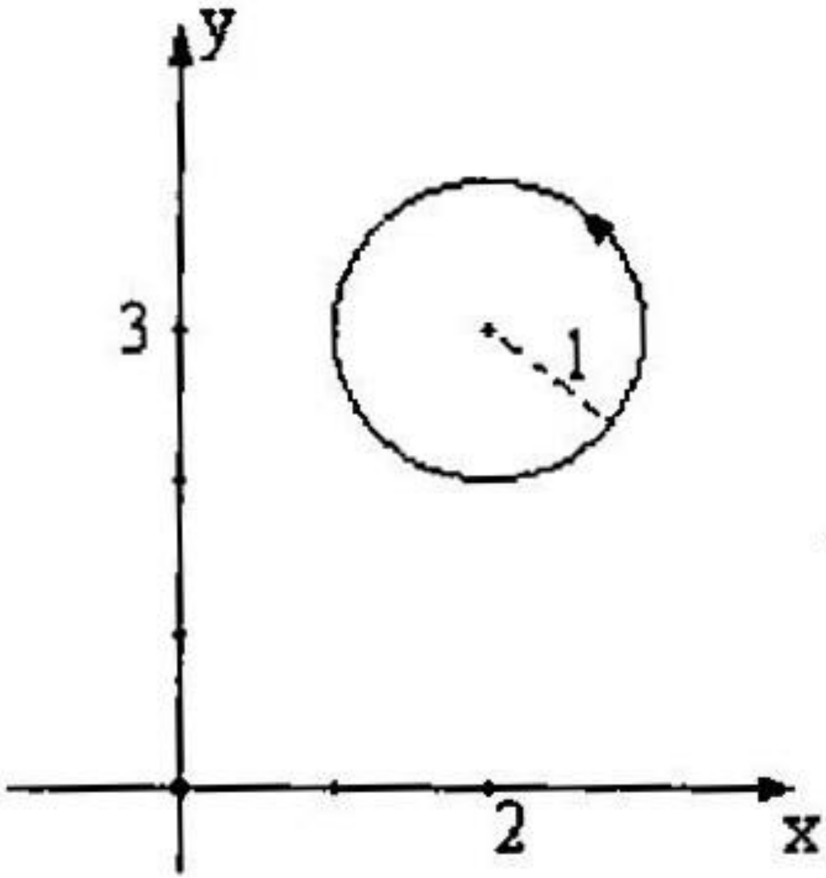
$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\ .\ ie^{i\theta}\ d\theta = i\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{i\theta}\ d\theta =$$

$$= i\left[\frac{1}{i}\ e^{i\theta}\right]_{\pi/2}^{3\pi/2} = e^{3\pi/2 i} - e^{\pi/2 i} = -i - i = -2i$$

مسئلهٔ ۵-۴: با استفاده از شیوهٔ پارامتری مطلوبست: $\int (z - ۲ - ۳i)^۳ \, dz = ?$

$$|z - ۲ - ۳i| = ۱$$

حل: (الف)



(ب) $z = z_0 + \rho e^{i\theta} = ۲ + ۳i + ۱\, e^{i\theta} \quad ; 0 \le \theta \le ۲\pi$

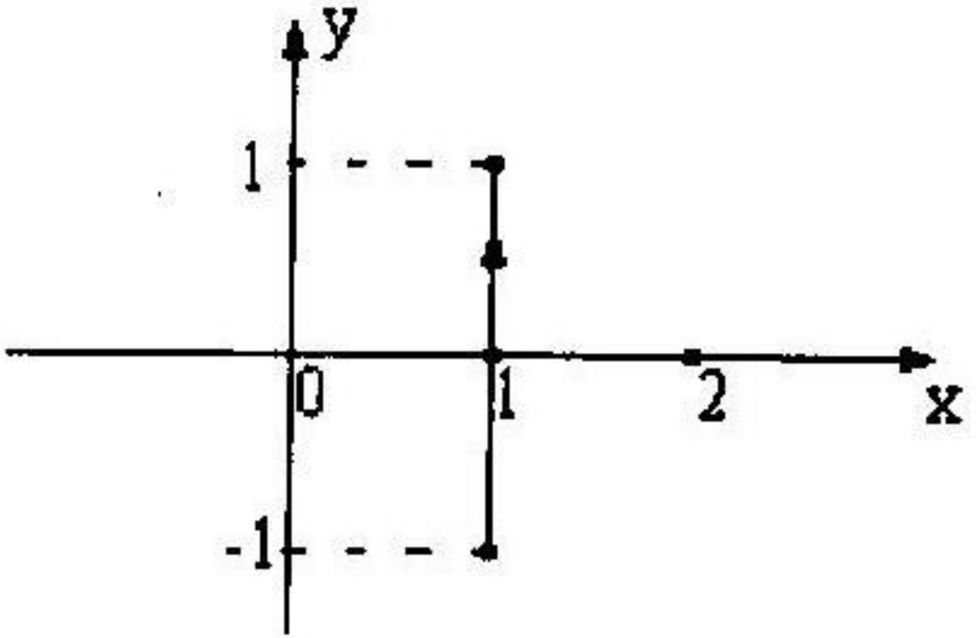
(ج) $z - ۲ - ۳i = e^{i\theta} ; \; 0 \le \theta \le ۲\pi$

$dz = ie^{i\theta} \, d\theta$

(د) $$\int_{|z-۲-۳i|} (z - ۲ - ۳i)^۳ \, dz = \int_0^{۲\pi} (e^{i\theta})^۳ \, ie^{i\theta} \, d\theta$$

$$= i \int_0^{۲\pi} e^{۴i\theta} \, d\theta = i \left[\frac{۱}{۴i} e^{۴i\theta} \right]_0^{۲\pi} = \frac{۱}{۴} \left[e^{۸\pi i} - ۱ \right] = 0$$

مسئلهٔ ۹-۴ : با استفاده از روش پارامتری انتگرال $\int_c e^z\,dz$ را که در آن c خط راستی است که نقطه $1 - i$ را به نقطهٔ $1+i$ اتصال می‌دهد، محاسبه کنید.



حل: (الف): $z(t) = x(t) + iy(t)$

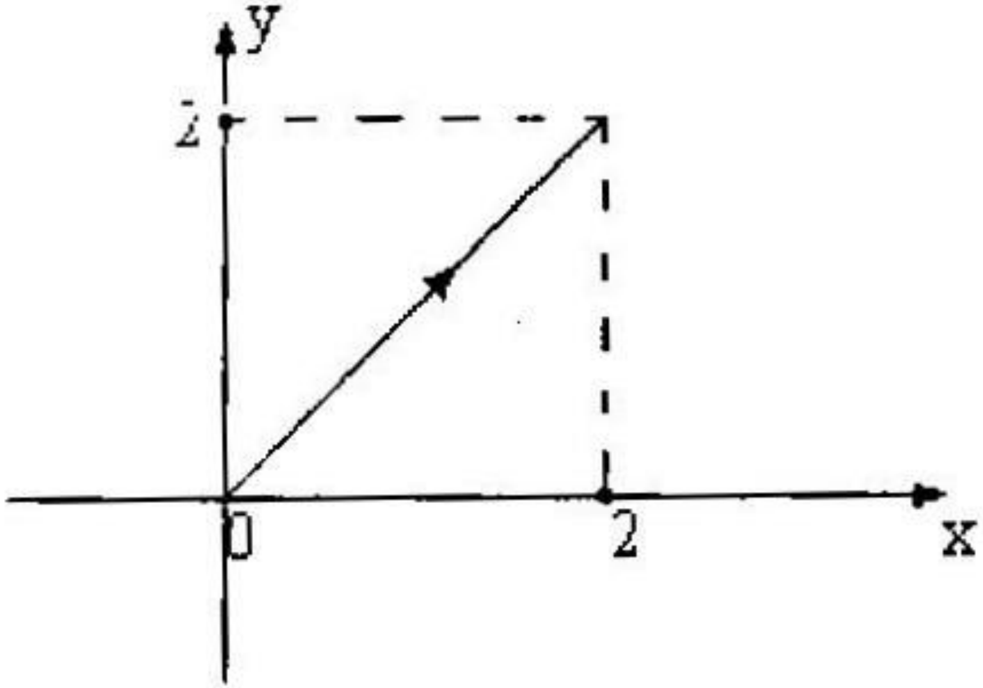
(ب): مسیر را پارامتری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \end{cases} \quad ; \quad -1 \le t \le 1 \Rightarrow \quad \begin{matrix} z = 1 + it \\ -1 \le t \le 1 \end{matrix}$$

(ج) $$dz = idt\,,\; e^z = e^{1+it} = e\,e^{it}$$

(د) $$\int_c e^z dz = e\int_{-1}^{1} ie^{it}\,dt = e\Big[e^{it}\Big]_{-1}^{+1} = e\Big[e^{i} - e^{-i}\Big]$$

مسئلهٔ ۱۱-۴: با استفاده از شیوهٔ پارامتری انتگرال $\int_c Im(z^۲)\,dz$ را که در آن c پاره‌خطی از ۰ تا $۲i + ۲$ است محاسبه کنید.



حل: (الف):

(ب): مسیر را پارامتری می‌کنیم:

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = it \end{cases} \quad , \quad ۰ \le t \le ۲$$

$y(t) = it$ معادله خط ارتباط دهندهٔ نقطه ۰ و $۲i + ۲$ است و i شیب این خط می‌باشد.

$$z = t + it \quad ; \quad \le t \le ۲ \Rightarrow z^۲ = t^۲ - t^۲ + ۲it^۲ = it^۲ \Rightarrow Im\,(z^۲) = ۲t^۲$$

(ج)

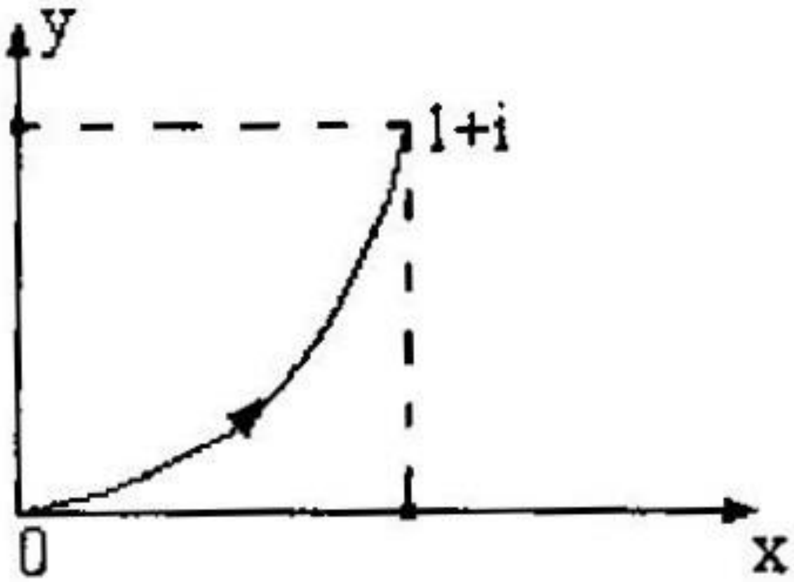
$$dz = (۱ + i)\,dz$$

(د)

$$\int_c Im(z^۲)\,dz = \int_0^۲ ۲t^۲.\,(۱ + i)\,dt = ۲(۱ + i)\left[\frac{t^۳}{۳}\right]_0^۲ = \frac{۱۶}{۳}\,(۱ + i)$$

(II) برای مسیر $y = x^{۲}$ داریم:

(الف) مسیر را به‌صورت مقابل رسم می‌کنیم.



(ب) مسیر را به‌صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^{۲} \end{cases} ;\ 0 \leq t \leq ۱ \Rightarrow z(t) = t + it^{۲} \quad ;\ 0 \leq t \leq ۱$$

(ج)
$$dz = (۱ + ۲it)\, dt$$

(د)
$$\int_0^{۱+i} (x^{۲} + iy)\, dz = \int_0^{۱} (t^{۲} + it^{۲})(۱ + ۲it)\, dt = (۱ + i)\int_0^{۱} (t^{۲} + ۲it^{۳})\, dt$$

$$= (۱ + i)\left[\frac{t^{۳}}{۳} + i\frac{t^{۴}}{۲}\right]_0^{۱} = (۱ + i)\left(\frac{۱}{۳} + \frac{i}{۲}\right) = \frac{۱}{۶}(-۱ + ۵i)$$

M ثابتی حقیقی است به‌طوریکه به‌ازای هر نقطه از منحنی c داشته باشیم $|f(z)| < M$. ازاین‌رو خواهیم داشت:

$$\left| \int_c f(z)\, dz \right| \leq Ml$$

مسئلهٔ ۱۳ – ۴: یک کرانه بالا برای قدر مطلق انتگرال $\int_{|z|=۱/۳} \frac{۱}{z}\, dz$ به‌دست آورید.

حل: با توجه به رابطه (۸-۴)، l را محیط دایرهٔ $|z| = \frac{۱}{۳}$ درنظر می‌گیریم و داریم $l = \frac{۲\pi}{۳}$. از طرفی داریم:

$$|f(z)| = \left|\frac{۱}{z}\right| = \frac{۱}{|z|} = \frac{۱}{۱/۳} = ۳$$

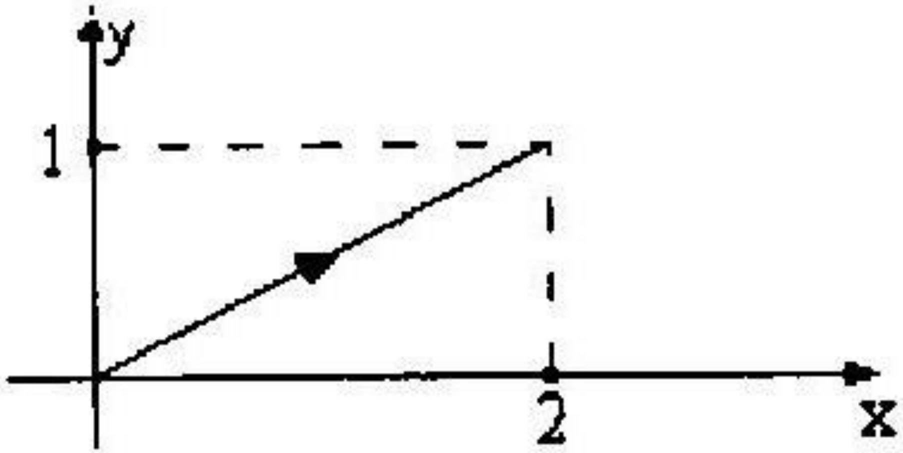
$۳ \times ۲\pi/۳ = ۲\pi$

مسئلهٔ ۱۴-۴: یک کرانهٔ بالا برای قدرمطلق انتگرال $\int_c Re z\, dz$ به‌دست آورید که در آن:

(الف) c خط راستی از $z = 0$ تا $z = ۲ + i$ است.

(ب) c خطوط راستی از $z = 0$ تا $z = ۲$ و سپس از $z = ۲$ تا $z = ۲ + i$ است.

حل: (الف) شکل مقابل را درنظر بگیرید.



طول مسیر، l را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم: $l = \sqrt{۲^۲ + ۱^۲} = \sqrt{۵}$

از طرف دیگر با توجه به شکل داریم: $|Re\ z| \leq ۲$. پس $M = ۲$ می‌باشد. لذا با توجه به رابطهٔ (۸-۴) داریم:

$$\left| \int_c Re z\, dz \right| \leq Ml = ۲\sqrt{۵}$$