ریاضی مهندسی کارشناسی

منوچهر سبحانی- دانشگاه سمنان

مشتق در توابع مختلط

مشتق در توابع مختلط

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) - iv(x,y)}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

$$z = x + i\,y$$

$$z + \Delta z = (x+\Delta x) + i\,(y+\Delta y)$$

$$\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\,\Delta y} + i\,\frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\,\Delta y} + i\,\frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\,\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta x + i\,\Delta y} + i\,\frac{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\,\Delta y} + i\,\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\,\Delta y} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

روابط کوشی ریمان

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\boldsymbol{f(z) = z^2 \rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -2y \end{cases}$$

$$f'(z) = 2x + i2y = 2z$$

$$f(z) = e^z \rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x Cosy \\ v(x,y) = e^x Siny \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x Cosy \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x Siny \end{cases}$$

$$f'(z) = e^z$$

خواص توابع تحلیلی

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

مشتقات مرتبه دوم بخش های حقیقی و موهومی تابع تحلیلی در معدله لاپلاس صدق می کنند.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

در این صورت **v** را مزدوج همساز **u** میگوییم. یا **u** را را مزدوج همساز **v−** می گوییم. فرقی ندارد.
یعنی مثلا با داشتن **v** میتوان **u** را محاسبه کرد یا بر عکس. این کار را با استفاده از روابط کوشی ریمان انجام می دهیم.

مثال: ابتدا نشان دهید **$u=x^2-y^2$** همساز است. سپس همساز ان را بیابید.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2 \end{cases} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 - 2 = 0$$

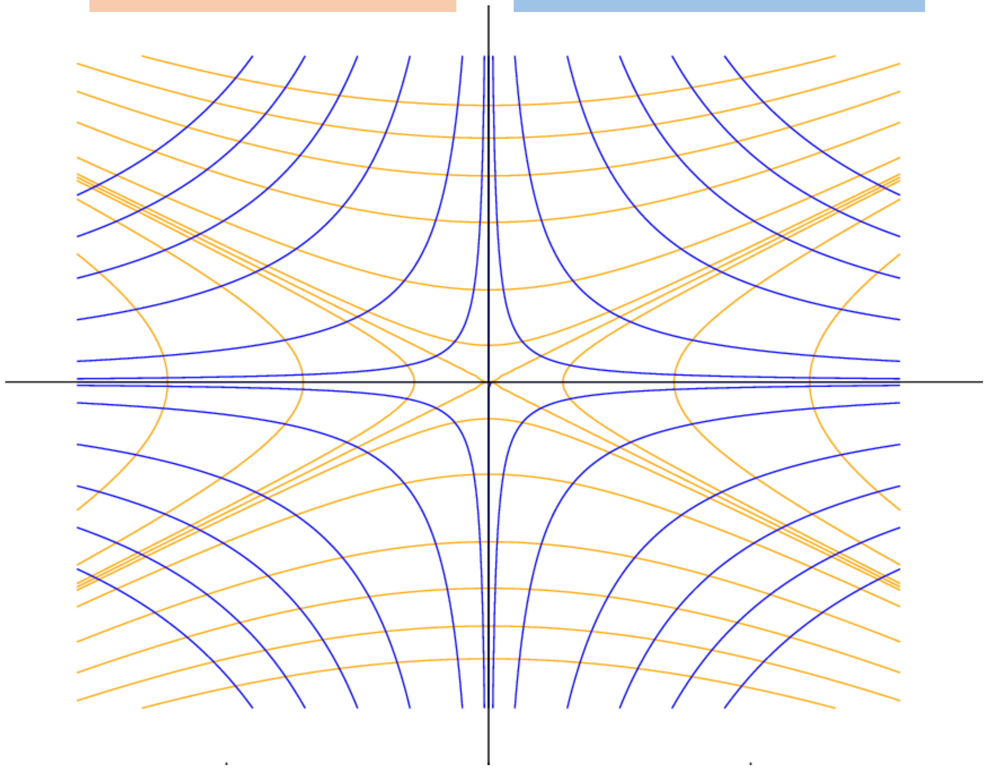
بنابراین **u** همساز است.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x, & v = 2xy + f(x) \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y + f'(x) = 2y, & f(x) = c \end{cases} \rightarrow f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = x^2 - y^2 + i2xy$$

اگر دسته منحنی های $u(x,y)=C_1$ و $v(x,y)=C_2$ را در نظر بگیریم. آنها بر هم عمودند.

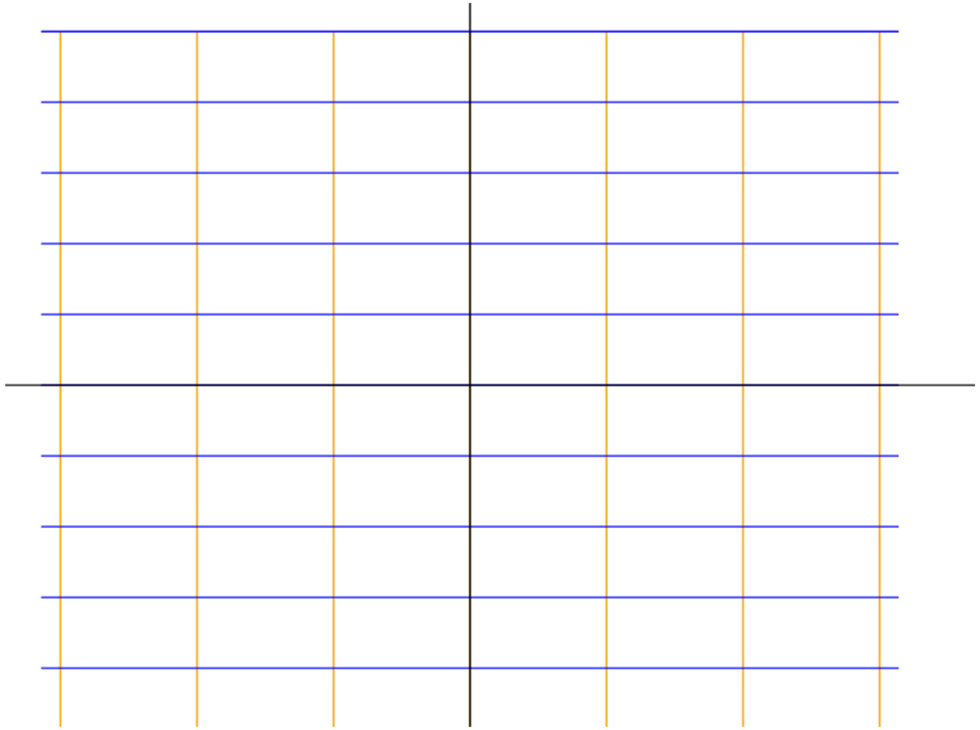
$$f(z) = z^2$$

$v = 2xy = C_2$ $u = x^2 - y^2 = C_1$



$$f(z) = z$$

$v = y = C_2$ $u = x = C_1$



اگر تابع تحلیلی بصورت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ بیان شده باشد و به جای متغیرهای x و y مقادیر معادل $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ و $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ را جایگزین کنیم. آنگاه تابع فقط بر حسب z بیان می شود و برحسب $\bar{z}$ صفر است.

فرض کنید تابع f(z) تحلیلی و بخش حقیقی آن به صورت زیر باشد. مطلوبست محاسبه مقدار f’(1) وf’(i) ؟

$e^{x^2-y^2}\,Cos(2xy)$

تابع f(z)؟

$$u(x,y)=e^{x^2-y^2}\,Cos(2xy)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(1)\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}\,Cos(2xy)-2ye^{x^2-y^2}\,Sin(2xy)=2e\\[2mm]-\dfrac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x^2-y^2}\,Cos(2xy)-2xe^{x^2-y^2}\,Sin(2xy)=0\end{cases}\rightarrow f'(1)=2e$$

$$f'(i)\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}\,Cos(2xy)-2ye^{x^2-y^2}\,Sin(2xy)=0\\[2mm]-\dfrac{\partial u}{\partial y}=2ye^{x^2-y^2}\,Cos(2xy)-2xe^{x^2-y^2}\,Sin(2xy)=2e\end{cases}\rightarrow f'(1)=i2e$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xe^{x^2-y^2}\,Cos(2xy)-2ye^{x^2-y^2}\,Sin(2xy)=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$v=e^{x^2-y^2}\,Sin(2xy)$$

$$f=e^{x^2-y^2}\,Cos(2xy)+ie^{x^2-y^2}\,Sin(2xy)=e^{x^2-y^2}(Cos(2xy)+iSin(2xy))=e^{x^2-y^2+2xy}=e^{z^2}$$

اگر f یک تابع تحلیلی باشد f‘(z) را بیابید.

$$\begin{cases} f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \\ u(x,y) = 2x(1-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2(1-y) = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{-\partial u}{\partial y} = 2x = \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \rightarrow f'(z) = 2(1-y) + i2x$$

تابع f را بیابید.

$$\begin{cases} v = 2y - y^2 + h(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = h'(x) = 2x \end{cases} \rightarrow h(x) = x^2 + c$$

$$f(z) = 2x - 2xy + i\left(2y - y^2 + x^2 + c\right)$$

$$f(z) = 2(x + iy) - 2xy + i\left(x^2 - y^2\right) + ic$$

$$f(z) = 2(x + iy) + i(i2xy + \left(x^2 - y^2\right)) + ic$$

$$f(z) = 2z + iz^2 + c$$

اگر v مزدوج همساز تابع u باشد آنگاه مقدار v(1,1)=?

$$\begin{cases} u = \left(x^2 - y^2 + 1\right)^2 - 4x^2y^2 \\ v(0,0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2 \times 2x\left(x^2 - y^2 + 1\right) - 8xy^2 = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2 + 4x \\ \dfrac{-\partial u}{\partial y} = 2 \times 2y\left(x^2 - y^2 + 1\right) + 8x^2y = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 12yx^2 - 4y^3 + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 4x^3y - 4xy^3 + 4xy + h(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3 + 4y + h'(x) \end{cases} \quad h(x) = c$$

$$v(1,1) = 4$$

تابع f را بیابید.

مکان هندسی اعداد زیر را بیابید

$$|z-2| = |z-2i|$$

$$|z-(1+i)| = |z-(-1-i)|$$

$$|z| = |z-(2+2i)|$$