ریاضی مهندسی کارشناسی

منوچهر سبحانی- دانشگاه سمنان

اعداد مختلط و توابع مختلط

اعداد مختلط

$i = \sqrt{-1}$

$a^2 = -1 \rightarrow \begin{cases} a = i \\ a = -i \end{cases}$

$z = x + iy \begin{cases} Re(z) = x \\ Im(z) = y \end{cases}$

$\bar{z} = x - iy$

$\begin{cases} Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2} \\ Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$

$\begin{cases} z_1 = x_1 + iy_1 \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases}$

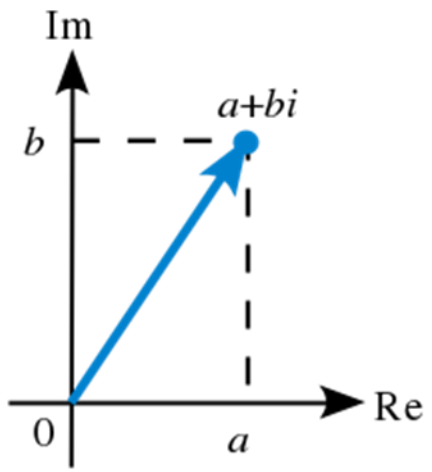
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_{2)+} i(y_1 + y_2)$

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_{2)+} i(y_1 - y_2)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + iy_1x_2 - iy_2x_1}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \frac{i(y_1x_2 - y_2x_1)}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

$$z_1z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \ i(y_2x_1 + y_1x_2)$$



فرم قطبی وتوان در اعداد مختلط

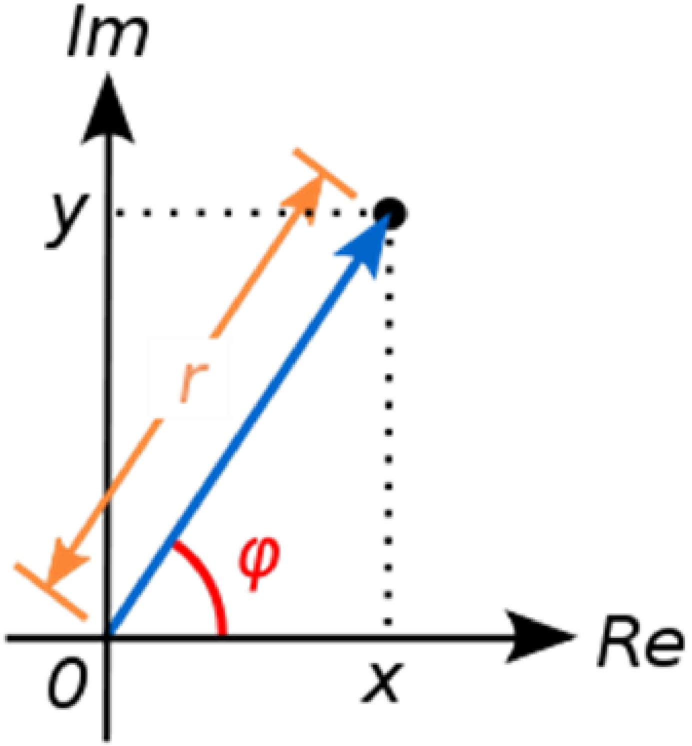
$$z = x + iy = rCos\theta + irSin\theta = r(Cos\theta + iSin\theta) \rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arc\,tg\,\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$r = \text{Modulus z} = |z| = \sqrt{\bar{z}z}$$

$$z = x + iy = r(Cos\theta + iSin\theta) = re^{i\theta}$$

$$\begin{cases} \theta = Argoman\ z \\ \theta + 2k\pi = argoman\ z \end{cases}$$

$$z^n = (x + iy)^n = r^n(Cos\theta + iSin\theta)^n = r^n e^{in\theta} = r^n(Cosn\theta + iSinn\theta)$$



جذر و ریشه در اعداد مختلط

$$z = w^n$$

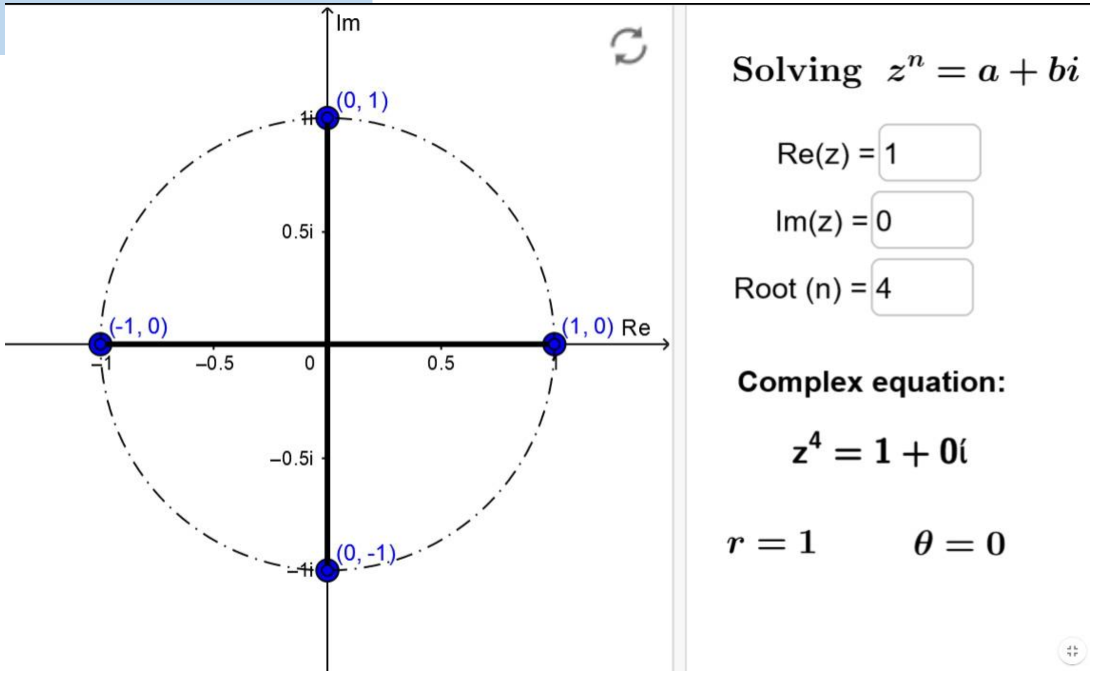
$$w = z^{\frac{1}{n}} = (x+iy)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(Cos(\theta+2k\pi) + iSin(\theta+2k\pi)\right)^{\frac{1}{n}} = r^n e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = r^{\frac{1}{n}}\left(Cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + iSin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right)$$

$$k = 0,1,2,..,(n-1)$$

ریشه های چهارم عدد ۱ را حساب کنید

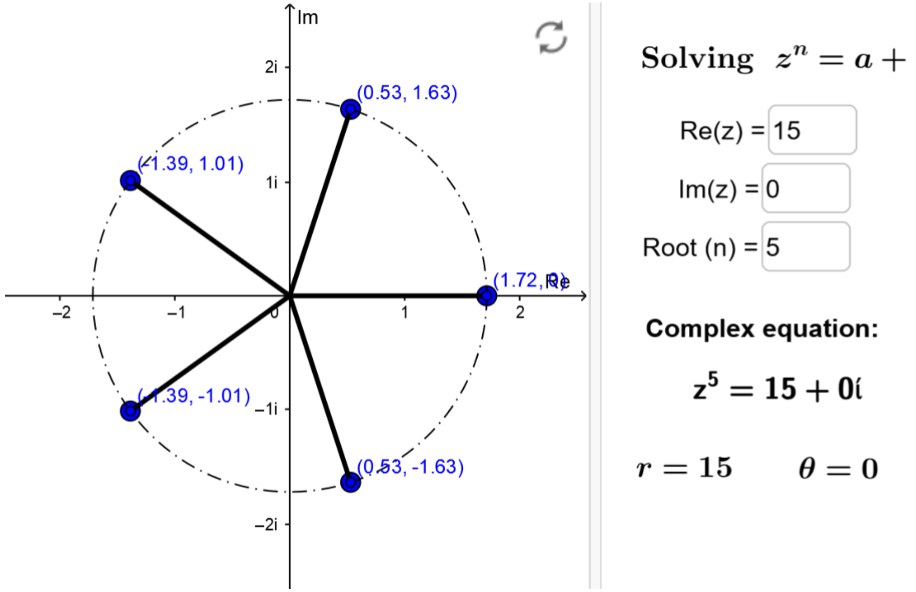
$$\begin{cases} z^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}}\left(Cos(0+2k\pi) + iSin(0+2k\pi)\right)^{\frac{1}{4}} = Cos\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right) + iSin\left(\frac{0+2k\pi}{4}\right) \\ k = 0,1,2,3 \end{cases}$$

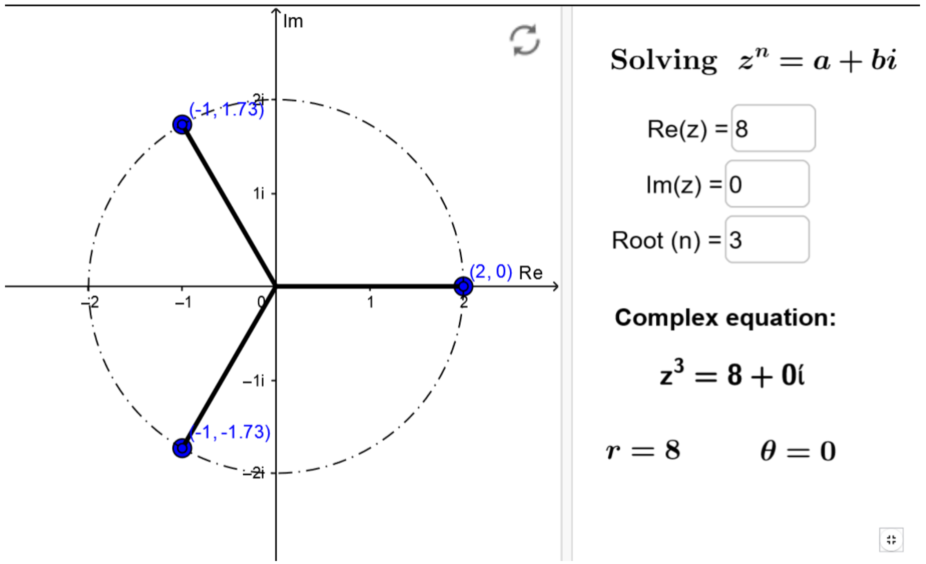
$$\begin{cases} \begin{cases} z = 1 \\ z = i \end{cases} \\ \begin{cases} z = -1 \\ z = -i \end{cases} \end{cases}$$

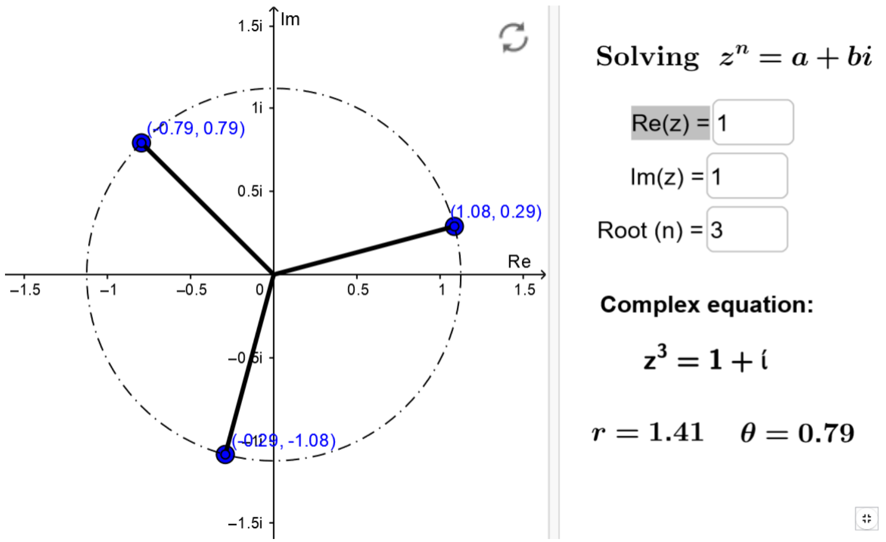


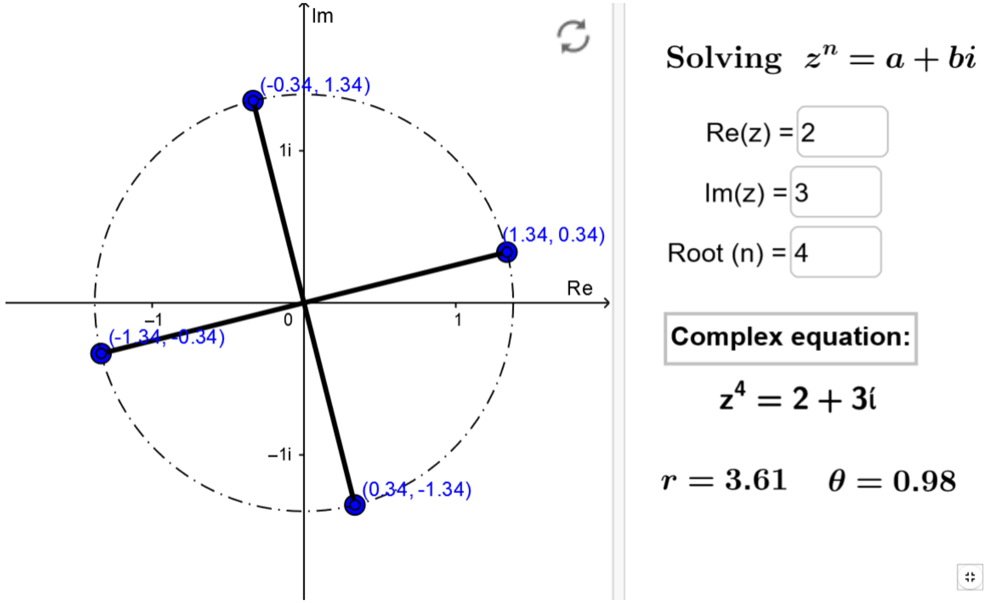
https://www.geogebra.org/m/Nn3P8sje

مثال های جذر و ریشه گرافیکی اعداد مختلط









معرفی توابع مختلط

توابع مختلط نیز مانند اعداد مختلط دارای خروجی مختلط می توانند باشند لذا دارای دو بخش حقیقی و موهومی مجزا از یکدیگر باشند. در این بخش هدف توانایی تفکیک بخش حقیقی و موهومی خروجی یک تابع مختلط است.
به مثال ساده زیر توجه کنید.

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + ixy + iyx = x^2 - y^2 + i2xy$$

همانطور که مشاهده می شود بخش های حقیق و موهومی را نیز می توان توابعی از x و y در نظرگرفت.

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f(z) = z^2 \rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$$

تفکیک بخش حقیقی و موهومی توابع مختلط

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(Cosy + iSiny) = e^x Cosy + ie^x Siny$$

$$f(z) = e^z \rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x Cosy \\ v(x,y) = e^x Siny \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$f(z) = lnz = \ln\left(re^{i\theta}\right) = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta$$

$$f(z) = lnz \rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \ln r \\ v(x,y) = \theta \end{cases}$$

تفکیک بخش حقیقی و موهومی توابع مختلط

$$f(z) = Cos\,z = Cos(x+iy) = Cos\,x\,Cos\,iy - Sin\,x\,Sin\,iy$$

$$\begin{cases} Cos\,t = \dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2} \\ Sin\,t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Cos\,z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ Sin\,z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Cos\,iy = \dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2} \\ Sin\,iy = \dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Cos\,iy = \dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2} = Cosh\,y \\ Sin\,iy = \dfrac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = i\,Sinh\,y \end{cases}$$

$$f(z) = Cos\,z \rightarrow \begin{cases} u = Cos\,x\,Cosh\,y \\ v = -Sin\,x\,Sinh\,y \end{cases}$$

$$f(z) = Sin\,z = Sin(x+iy) = Sin\,x\,Cos\,iy + Cos\,x\,Sin\,iy = Sin\,x\,Cosh\,y + i\,Cos\,x\,Sinh\,y$$

$$f(z) = Sin\,z \rightarrow \begin{cases} u = Sin\,x\,Cosh\,y \\ v = Cos\,x\,Sinh\,y \end{cases}$$

مدول و آرگومان عدد زیر را بیابید e^{z+i}

$$e^{z+i}=e^{x+iy+i}=e^{x}e^{i(y+1)}=e^{x}\left(Cos(y+1)+iSin(y+1)\right)$$

$$\begin{cases} Modulus\left(e^{z+i}\right)=e^{x} \\ argoman=(y+1)+2k\pi \end{cases}$$

ثابت کنید $\ln(-1)=\pi i$

$$lnz=\ln\left(re^{i\theta}\right)=\ln r+\ln e^{i\theta}=\ln r+i\theta$$

$$z=-1\rightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} r=\sqrt{1} \\ \theta=\pi \end{cases}\rightarrow z=Cos\ \pi+i\ Sin\ \pi=e^{i\pi}$$

$$\ln(-1)=\ln\left(e^{i\pi}\right)=\pi i$$

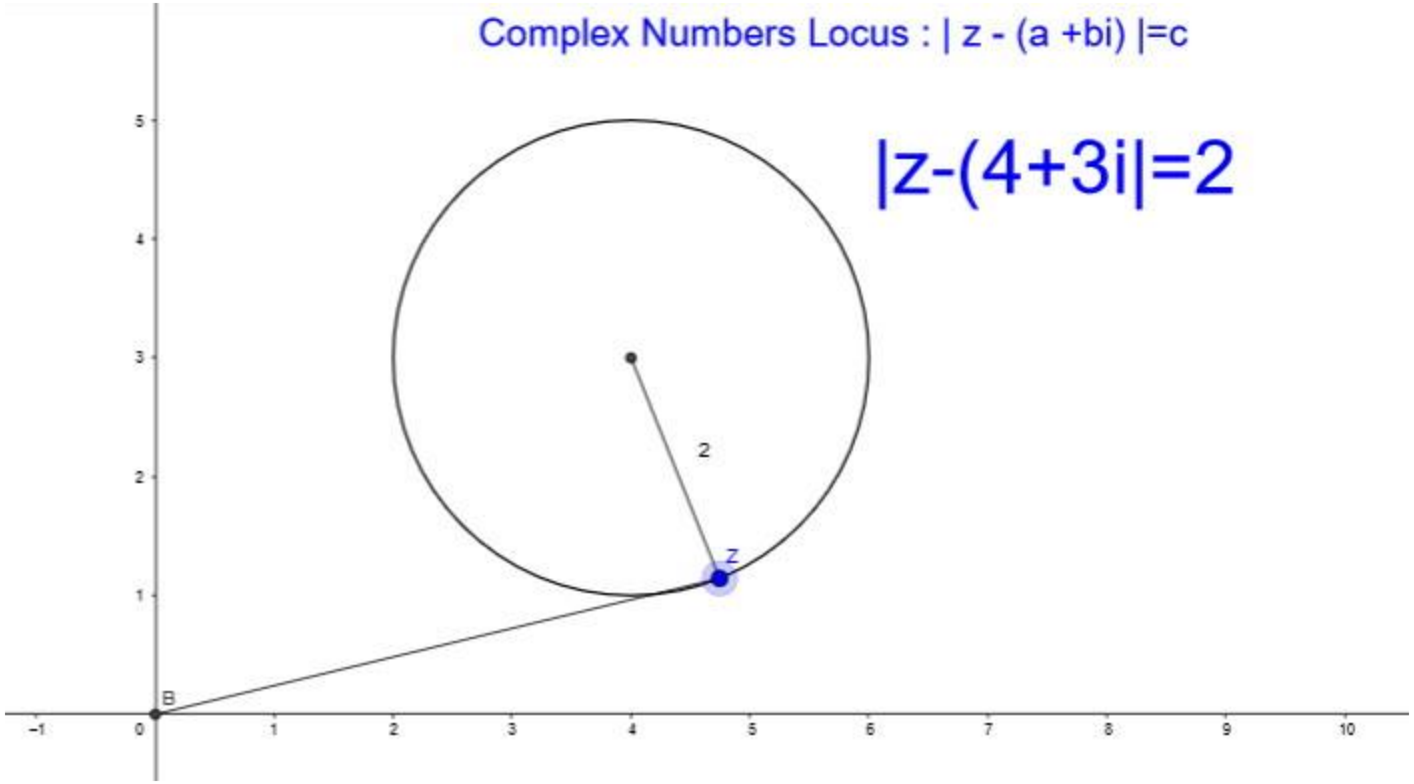
$$|z|=1\rightarrow\begin{cases} z=e^{i\theta} \\ \bar{z}=e^{-i\theta} \end{cases}\rightarrow\bar{z}=\frac{1}{z}\rightarrow\bar{z}z=1\rightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \\ y=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

مکان هندسی اعداد معادله زیر را بیابید

$$|z - z_0| = r$$

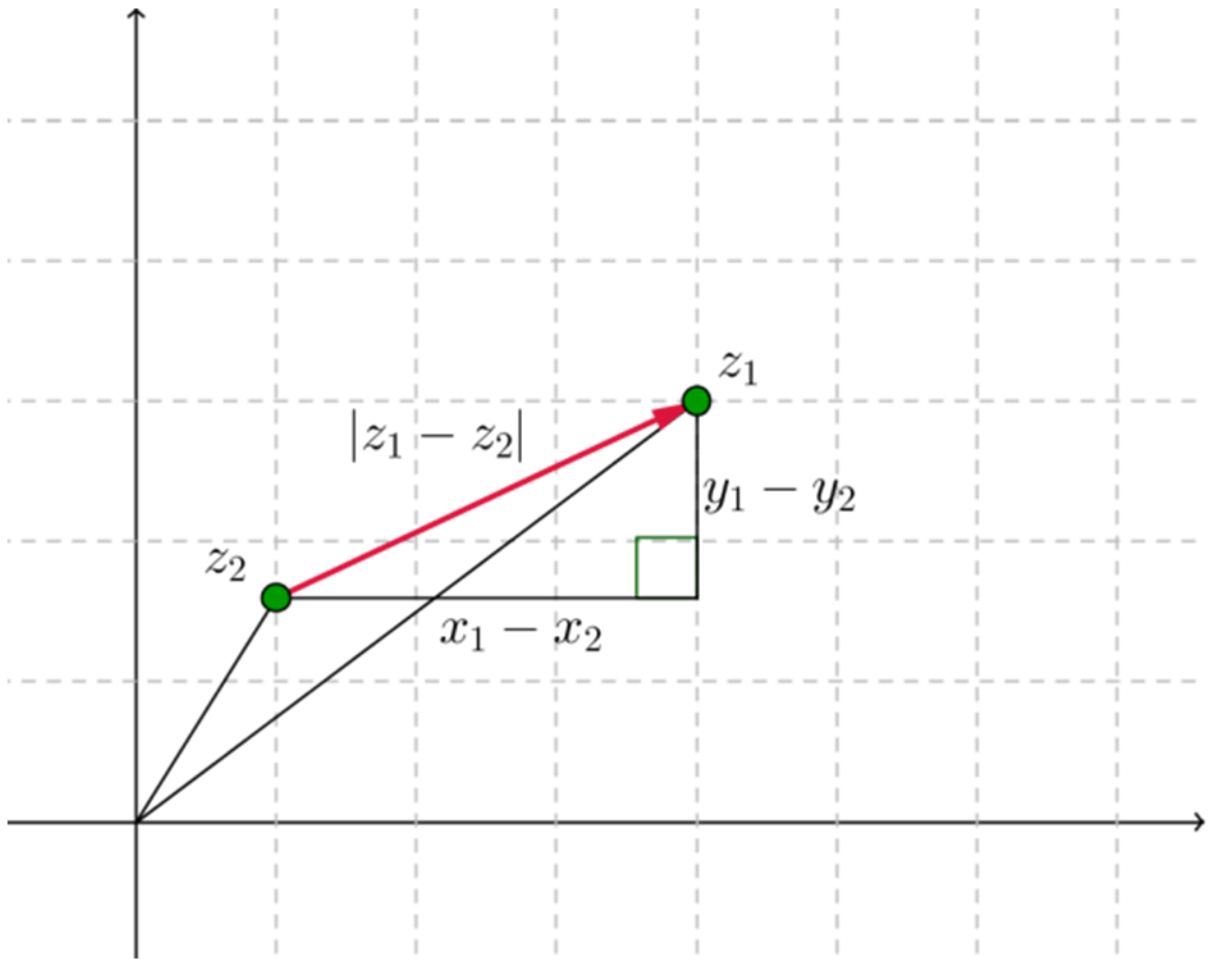
$$|x + iy - x_0 - iy_0| = |(x - x_0) + i(y - y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



https://www.geogebra.org/m/XHzTnAR5

فاصله دو عدد مختلط چیست؟



طول پاره خط قرمز در مثلث تشکیل شده از دو عدد مورد نظر است