ریاضی مهندسی کارشناسی

منوچهر سبحانی- دانشگاه سمنان

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

مرتبه دوم

معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم

صورت کلی

$$P(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+Q(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+R(x,y,u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=S(x,y,u)$$

برای سهولت ابتدا ضرایب را اعداد ثابت در نظر می گیریم و همچنین **S=0** فرض می کنیم.

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

نوشتار جدید و ساده

این نوشتار از پیچیدگی و حجم عملیات ریاضی می کاهد و توصیه شدید می شود که بخصوص در معادلات مرتبه دوم از این نوشتار استفاده شود.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u_x \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=u_y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_{xx} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u_{yy} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=u_{xy}$$

تغییر در متغییر ابزار قدرتمندی در ریاضیات جهت ساده سازی و حل مسائل است

معادله زیر را با انجام تغییر متغیر p=y+x و q=y+2x حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

در مسائل معادلات دیفرانسیل علاوه بر تعویض متغیرهای قبلی با جدید باید مشتقات آنها نیز نسبت به هم محاسبه و جایگزین شوند.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 1 = p_x \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = 2 = q_x \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 1 = p_y \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = 1 = q_y$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial p} + 2\frac{\partial u}{\partial q}$$

همانطور که ملاحظه می شود استفاده نکردن از نوشتار جدید باعث افزایش حجم محاسبه و پیچیدگی پارامترها می شود.

$$u_x = u_p p_x + u_q q_x = u_p + 2u_q$$

$$u_{xx} = u_{pp} p_x + u_{pq} q_x + 2(u_{qq} q_x + u_{qp} p_x) = u_{pp} + 4u_{qq} + 4u_{pq}$$

$$u_y = u_p p_y + u_q q_y = u_p + u_q$$

$$u_{yy} = u_{pp} p_y + u_{pq} q_y + u_{qq} q_y + u_{qp} p_y = u_{pp} + u_{qq} + 2u_{qp}$$

$$u_{xy} = u_{pp} p_y + u_{pq} q_y + 2(u_{qq} q_y + u_{qp} p_y) = u_{pp} + 2u_{qq} + 3u_{qp}$$

$u_{xx} - 3u_{xy} + 2\,u_{yy} = 0$ $\quad u_{xx} = u_{pp} + 4u_{qq} + 4u_{pq}$ $\quad u_{xy} = u_{pp} + 2u_{qq} + 3u_{qp}$ $\quad u_{yy} = u_{pp} + u_{qq} + 2u_{qp}$

مقادیر جدید تغییر متغیر داده شده از **x,y** به **p,q** را در صورت مسئله جایگذاری می کنیم

$$u_{pp} + 4u_{qq} + 4u_{pq} - 3(u_{pp} + 2u_{qq} + 3u_{pq}) + 2\,(u_{pp} + u_{qq} + 2u_{qp}) = 0 = 0 + 0 - u_{qp}$$

$$u_{qp} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial p \partial q} = 0 \;\rightarrow \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial q}\right) = \; f(q) \;\rightarrow u = h(q) + g(p)$$

$$u = h(y + 2x) + g(y + x)$$

حال اینجا این سوال مطرح می شود که تغییر متغیر داده شده از کجا آمده بود و چگونه بفهمیم که چه تغییر متغیری بدهیم تا صورت سوال اینقدر ساده شود؟

روش دالامبر

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{dy}{\partial x}=\lambda_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Delta=b^2-4ac$$

$$\frac{dy}{\partial x}=\lambda_1 \qquad y=\lambda_1 x+p \qquad \frac{dy}{\partial x}=\lambda_2 \qquad y=\lambda_2 x+q \qquad \begin{matrix} p=y-\lambda_1 x \\ q=y-\lambda_2 x \end{matrix}$$

$$u=h(y-\lambda_1 x)+g(y-\lambda_2 x)$$

با بدست آوردن λ_1 و λ_2 دیگر نیازی به انجام مراحل قبل نیست و جواب نهایی مستقیما بدست می آید

حالا

اگر $\Delta>0$ باشد آنگاه معادله هذلولوی و جواب :

$$u=h(y-\lambda_1 x)+g(y-\lambda_2 x)$$

اگر $\Delta<0$ باشد آنگاه معادله بیضوی است و ریشه ها مختلط بوده $\lambda_2=v-iw$ $\lambda_1=v+iw$ وجواب :

$$u=h(y-(v+iw)x)+g(y-(v-iw)x)$$

اگر $\Delta=0$ باشد یک ریشه داریم آنگاه معادله سهموی است و جواب مثل روبرو می باشد.

$$u=h(y-\lambda_1 x)+xg(y-\lambda_1 x)$$

معادلات زیر را حل کنید

$$u_{xx} + u_{xy} - 2\,u_{yy} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \qquad y = 2x + p \qquad p = y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \qquad y = -x + q \qquad q = y + x$$

$$u = h(y - 2x) + g(y + x)$$

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$$

$$\frac{dt}{dx} = \lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 + 4c^2}}{2c^2} = \frac{\pm 1}{\mathrm{c}}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\mathrm{c}} \qquad x = ct + p \qquad p = x - ct$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{\mathrm{c}} \qquad x = -ct + p \qquad p = x + ct$$

$$u = h(x - ct) + g(x + ct)$$

معادلات زیر را حل کنید

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-1$$

a=x b=$2x^2$ c=0 Δ=b^2-4ac=$4x^4$

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2x\pm\sqrt{4x^4}}{2x}=\begin{cases}0\\2x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=0\\\dfrac{dy}{dx}=2x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=p\\y-x^2=q\end{cases}$$

$$\begin{cases}p_x=0\\p_y=1\end{cases}\qquad\begin{cases}q_x=-2x\\q_y=1\end{cases}$$

$$u_x=u_p p_x+u_q q_x=-2xu_q$$

$$u_{xx}=-2\,u_q-2x(u_{qq}q_x+u_{qp}p_x)=-2\,u_q+4x^2u_{qq}$$

$$u_{xy}=-2x(u_{qq}q_y+u_{qp}p_y)=-2x(u_{qq}+u_{qp})$$

$$-4x^3u_{qp}=-1$$

$$u_{qp}=\frac{1}{4x^3}=\frac{1}{4(p-q)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xrightarrow{\int dp}u_q=\frac{1}{4}\int\frac{1}{(p-q)^{\frac{3}{2}}}dp+f(q)=\frac{-2}{4}\left(\frac{1}{(p-q)^{\frac{1}{2}}}\right)+f(q)$$

$$\xrightarrow{\int dq}u=\int\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{(p-q)^{\frac{1}{2}}}\right)dq+h(q)+g(p)=(p-q)^{\frac{1}{2}}+h(q)+g(p)$$

$$\boldsymbol{u=|x|+h(y-x^2)+g(y)}$$

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

a= -y b=x c=0 Δ=b^2-4ac=x^2

$$\frac{dx}{dy}=\lambda_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{x\pm\sqrt{x^2}}{-2y}=\begin{cases}0\\ \frac{-x}{y}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{dx}{dy}=0\\ \frac{dx}{dy}=\frac{-x}{y}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=p\\ lnx=-lny+lnq\rightarrow xy=q\end{cases}$$

$$\begin{cases}p_x=1\\ p_y=0\end{cases}\quad\begin{cases}q_x=y\\ q_y=x\end{cases}$$

$$u_y=u_p p_y+u_q q_y=xu_q$$

$$u_{yy}=x(u_{qp}p_y+u_{qq}q_y)=x^2u_{qq}$$

$$u_{yx}=x\left(u_{qp}p_x+u_{qq}q_x\right)+u_q=xyu_{qq}+xu_{qp}+u_q$$

$$xu_{qp}+u_q=0$$

$$pu_{qp}+u_q=0$$

$$\text{p}\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)=0\rightarrow\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)=z\rightarrow\text{p}\frac{\partial z}{\partial p}+z=0$$

$$\text{p}\frac{\partial z}{\partial p}=-z\rightarrow\frac{\partial z}{z}=-\frac{\partial p}{p}\rightarrow lnz=-lnp+\ln\left(f(q)\right)\rightarrow z=\frac{f(q)}{p}$$

$$\frac{\partial u}{\partial q}=\frac{f(q)}{p}\xrightarrow{\int dq}u=\frac{1}{p}h(q)+g(p)$$

$$\boldsymbol{u=\frac{h(xy)}{x}+g(x)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,x) = e^{3x}, \qquad u(x,-2x) = Cos3x \end{cases}$$

$$u_{xx} - u_{xy} - 2u_{yy} = 0$$

$$a = 1, \qquad b = -1, \qquad c = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 \\ \dfrac{dy}{dx} = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - x = p \\ y + 2x = q \end{cases}$$

$$u = f(y-x) + g(y+2x)$$

$$\begin{cases} f(x-x) + g(x+2x) = f(0) + g(3x) = e^{3x} \\ f(3x) + g(0) = Cos3x \end{cases}$$

$$f(0) + g(0) = 1$$

$$\begin{cases} g(3x) = e^{3x} + f(0) \\ f(3x) = Cos3x + g(0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(y+2x) = e^{y+2x} + f(0) \\ f(y-x) = Cos(y-x) + g(0) \end{cases}$$

$$u = e^{y+2x} + f(0) + Cos(y-x) + g(0)$$

$$u = e^{y+2x} + Cos(y-x) + 1$$

$$u=\begin{cases}4\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u(x,0)=Sin(2x)\,, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0\end{cases}$$

$$4u_{tt}-25u_{xx}=0$$

$$a=4,\qquad b=0,\qquad c=-25$$

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{0\pm\sqrt{400}}{8}=\begin{cases}\dfrac{+5}{2}=\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{-5}{2}=\dfrac{dx}{dt}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x-\dfrac{5}{2}t=p\\ x+\dfrac{5}{2}t=q\end{cases}$$

$$u=f\left(x-\frac{5}{2}t\right)+g\left(x+\frac{5}{2}t\right)$$

$$f(x)+g(x)=Sin(2x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{-5}{2}\frac{\partial f\left(x-\frac{5}{2}t\right)}{\partial\left(x-\frac{5}{2}t\right)}+\frac{5}{2}\frac{\partial g\left(x+\frac{5}{2}t\right)}{\partial\left(x+\frac{5}{2}t\right)}\rightarrow\frac{-5}{2}\frac{\partial f(x)}{\partial x}+\frac{5}{2}\frac{\partial g(x)}{\partial x}=0\rightarrow\frac{\partial f(x)}{\partial x}=\frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

$$f(x)=g(x)+C$$

$$2g(x)+C=Sin(2x)\ \rightarrow g(x)=\frac{1}{2}[Sin(2x)-C]$$

$$u=g\left(x-\frac{5}{2}t\right)+g\left(x+\frac{5}{2}t\right)+C$$

$$u=\frac{1}{2}Sin(2x-5t)-\frac{C}{2}+\frac{1}{2}Sin(2x+5t)-\frac{C}{2}+C$$

$$\boldsymbol{u=Sin(2x)\,Cos(5t)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{2y} + Siny$$

$$U(x,y) = w(x,y) + v(y)$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = e^{2y} + Siny}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \\ 2\dfrac{d^2 v}{dy^2} = e^{2y} + Siny \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \begin{cases} 1 + i = \dfrac{dy}{dx} \\ 1 - i = \dfrac{dy}{dx} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - (1+i)x = p \\ y - (1-i)x = q \end{cases}$$

$$\boldsymbol{w(x,y) = f(y - (1+i)x) + g(y - (1-i)x)}$$

$$2\frac{d^2 v}{dy^2} = e^{2y} + Siny \rightarrow 2\frac{dv}{dy} = \frac{1}{2}e^{2y} - Cosy + c_1 \rightarrow 2v = \frac{1}{4}e^{2y} - Siny + c_1 y + c_2$$

$$\boldsymbol{u(x,y) = f(y - (1+i)x) + g(y - (1-i)x) + \frac{1}{8}e^{2y} - \frac{1}{2}Siny + c_1 y + c_2}$$