ریاضی مهندسی کارشناسی

منوچهر سبحانی- دانشگاه سمنان

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی
مرتبه اول

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

در درس معادلات دیفرانسیل معادلات یک متغییره y و مشتقات آن بر حسب x آموزش داده شد.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow dy = 2xdx \rightarrow$$ از طرفین انتگرال نامعین $$y = x^2 + c$$

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات با بیش از یک متغیر گفته می شود.

مثلا تابع y دارای دو متغییر x و t است.

همچنین بجای دیفرانسیل d از علامت رند ∂ استفاده می شود.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2x \rightarrow \partial y = 2x\partial x \rightarrow$$ از طرفین انتگرال نامعین $$y = x^2 + f\ (t)$$

جواب بالا یک جواب عمومی برای معادله است چون تابع f(t) هر تابعی می تواند باشد.

معمولا در کتاب ها توابع چند متغیره را با u و z و .. نشان می دهند و y هم خودش مثل x متغیر مستقل است.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کاربردهای فراوانی در حل مسائل چند متغییره مهندسی دارند.

مثلا در انتقال حرارت در طراحی کوره های متالورژی تغییرات دمای جداره کوره میتواند با تغییر فاصله و زمان تغییر کند.

و یا اینکه موقعیت y یک نقطه در یک موج در حال نوسان به موقعیت x آن و زمان t وابسته است.

معادله یک بعدی موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

معادله یک بعدی گرما

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

معادله دو بعدی لاپلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

حل هر یک از معادلات بالا با داشتن شرایط مرزی (نقاط اولیه) ممکن است

درجه معادله – به توان بالاترین مرتبه مشتق گفته میشود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

درجه اول و مرتبه دوم

معادله خطی – اگر کل عبارات متغیر وابسته و مشتقات آن از درجه اول باشند یعنی توان نداشته باشیم.

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial y} + x^2 \frac{\partial u}{\partial x} = xy^2}$$

معادله همگن – تمام جملات معادله شامل متغییر وابسته یا مشتقات آن باشند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$$

همگن

$$\frac{\partial u}{\partial y} + x^2 \frac{\partial u}{\partial x} = xy^2$$

غیر همگن

حل عمومی معادلات آسان

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \;\rightarrow u = c \;\rightarrow u = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \;\rightarrow u = f(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \;\rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x) \;\rightarrow u = yf(x) + g(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \;\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(y) \;\rightarrow u = xf(y) + g(y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \;\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(y) \;\rightarrow u = h(y) + g(x)$$

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه اول

صورت کلی

$$P(x,y,u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+Q(x,y,u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=R(x,y,u)$$

اگر تابع دو متغیره u(x,y) در صفحه ux فرض شود یعنی u فقط بر حسب x است پس y ثابت است لذا:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=0 \qquad P(x,y,u)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=R(x,y,u) \qquad \frac{\mathrm{d}u}{R(x,y,u)}=\frac{\mathrm{d}x}{P(x,y,u)}$$

همچنین اگر تابع u(x,y) در صفحه uy فرض شود یعنی u فقط بر حسب y است پس x ثابت است لذا:

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=0 \qquad Q(x,y,u)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=R(x,y,u) \qquad \frac{\mathrm{d}u}{R(x,y,u)}=\frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,u)}$$

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی داریم

$$\frac{dx}{P(x,y,u)}=\frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,u)}=\frac{\mathrm{d}u}{R(x,y,u)}$$

مثال: معادله دیفرانسیل جزئی روبرو را حل کنید.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + (x+2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x$$

$$P(x,y,u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q(x,y,u)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = R(x,y,u)$$

$$P = 1$$
$$Q = (x+2)$$
$$R = x$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{\mathrm{dy}}{x+2} = \frac{\mathrm{du}}{x} \quad \begin{cases} (x+2)dx = dy \\ xdx = du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + 2x = y + c_1 \\ \dfrac{x^2}{2} = u + c_2 \quad \rightarrow u = \dfrac{x^2}{2} - c_2 \end{cases}$$

c_1 و c_2 دوصفحه هستند که محل تلاقی آنها جواب دستگاه است بدین منظور می توان مثلا نوشت $c_2=f(c_1)$

$$u = \frac{x^2}{2} - f\left(\frac{x^2}{2} + 2x - y\right)$$

$$u = \frac{x^2}{2} - Sin\left(\frac{x^2}{2} + 2x - y\right)$$

این جواب عمومی است زیرا f
هر تابعی می تواند باشد

مثال: معادله دیفرانسیل جزئی زیر را حل و u را تابع صریحی بر حسب x و y بدست آورید.

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (y-1)\dfrac{\partial u}{\partial y} = u-2 \\ u(x,3) = x-2 \end{cases}$$

اول حل عمومی مانند مثال قبل

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y-1} = \frac{du}{u-2} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y-1} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{u-2} \end{cases}$$

Lnx$= Ln(y-1) + Ln(c_1) = Ln[(y-1).c_1]$

Lnx$= Ln(u-2) + Ln(c_2) = Ln[(u-2).c_2]$

$$\begin{cases} x = (y-1).c_1] \\ x = (u-2).c_2] \end{cases} \quad c_1 = \frac{x}{y-1} \quad u-2 = \frac{x}{c_2}$$

$$c_2 = f(c_1) \qquad u-2 = \frac{x}{f(\frac{x}{y-1})}$$

$$(x-2)-2 = \frac{x}{f(\frac{x}{3-1})} \qquad f(\frac{x}{2}) = \frac{x}{x-4} \qquad f(x) = \frac{2x}{2x-4} \qquad f(\frac{x}{y-1}) = \frac{2(\frac{x}{y-1})}{2(\frac{x}{y-1})-4}$$

اکنون تابع f را که از شرط اولیه بدست آمده جایگذاری می کنیم

$$f\left(\frac{x}{y-1}\right)=\frac{2(\frac{x}{y-1})}{2(\frac{x}{y-1})-4}$$

$$\boxed{=\frac{x}{x-y+2}}$$

$$u\text{-}2=\frac{x}{f(\frac{x}{y-1})}$$

$$\boxed{u\text{-}2=\frac{x}{\frac{x}{x-y+2}}}$$

$$\boxed{u=x-y+4}$$

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2x \\ u(0, y) = \sqrt{y} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{3} = \frac{du}{2x}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{2} = \dfrac{dy}{3} \\ \dfrac{dx}{2} = \dfrac{du}{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 2y + c_1 \\ x^2 = 2u + c_2 \end{cases} \rightarrow c_2 = f(c_1) \rightarrow x^2 = 2u + f(3x - 2y)$$

$$u = \frac{1}{2}\left(x^2 - f(3x - 2y)\right)$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}\left(0 - f(0 - 2y)\right) \rightarrow -2\sqrt{y} = f(-2y) \rightarrow f(t) = -2\sqrt{\frac{-t}{2}}$$

$$f(3x - 2y) = -2\sqrt{\frac{2y - 3x}{2}}$$

$$u = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{\frac{2y - 3x}{2}}$$

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial x} = u \\ u(x,2) = x - 1 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{\mathrm{dy}}{y} = \frac{du}{u}$$

$$\begin{cases} lny = lnx + lnc_1 \\ lnu = lnx + lnc_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = c_1 x \\ u = c_2 x \end{cases} \rightarrow c_2 = f(c_1)$$

$$u = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x - 1 = xf\left(\frac{2}{x}\right) \rightarrow \frac{x-1}{x} = f\left(\frac{2}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{2x} \rightarrow f(t) = 1 - \frac{t}{2}$$

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = 1 - \frac{y}{2x}$$

$$u = x\left(1 - \frac{y}{2x}\right) = x - \frac{1}{2}y$$